

Exercice 1 – EML 2016

On considère l'application $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0; +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t \cdot \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Justifier que f est classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0; +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau de variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - a) Montrer que C admet une tangente en O et préciser celle-ci.
 - b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I , et préciser les coordonnées de I .
 - c) Tracer l'allure de C .
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
8. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \longmapsto t - \ln(t)$.)
9. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 2 - EDHEC 1997

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_n(x) = x - n \cdot \ln(x).$$

1. a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.

b) Montrer que $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$ et en déduire que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

En conclure que (u_n) est décroissante.

c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge.

d) Montrer que $\forall n \geq 3, \frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

e) Montrer que $\ln(u_n) \sim_{+\infty} u_n - 1$. En déduire que $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice 3 – d'après Ecricome 2024

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \dots \\ \dots & & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Etude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $(M + I_3)^2$
- En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1} .
- Résoudre l'équation $M.X = 2.X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Résoudre de même l'équation $M.X = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.
- Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

- Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

- En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .

Exercice 4 – EML 2017

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k -ième tirage"

R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k -ième tirage"

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. a) Déterminer soigneusement $P(Y = 3)$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P([Y = n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(Y \leq n)$ à l'aide d'une somme.

En déduire un programme Python qui demande un entier naturel non nul n à l'utilisateur, puis calcule et affiche la valeur de $P(Y \leq n)$.

2. Déterminer la loi de Z . Z admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 5 – Ecricome 2024

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel k , on pose

$$R_X(k) = P(X > k)$$

La partie II est indépendante des autres parties ; les résultats de la partie I pourront intervenir dans la partie III.

Partie I

1. Soit p un réel de $]0,1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .

a) Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k .

b) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

a) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $P(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X .

b) En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout entier naturel k , $R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

3. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

4. Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

a) Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $E(X + 1)$.

En déduire que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

b) Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $E((X - 1)(X + 1))$.

En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1.

On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne.

Puis, à l'issue de chaque année numéro k (k étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k - 1)$ ème année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année k avec la probabilité α_k , et elle continue à fonctionner après la fin de l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$.

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

5. Justifier que, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k) \cdot R_X(k - 1)$.

6. En déduire, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$.

7. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression de $P(X = k)$ en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On pourra utiliser le résultat de la question 2a.

8. Etude de deux exemples.

a) Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p.$$

Reconnaitre la loi de X .

b) Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$.

Déterminer la loi de X .