ECG2 - Concours blanc n°2
Mardi 25 Février 2025
4 heures

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy, numpy.random et numpy.linalg de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, import numpy.random as rd et import numpy.linalg as al.

Exercice 1 – EDHEC 2016

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n; +\infty[, \ f_n(x) = \int_n^x \exp(\sqrt{t})dt.$$

1. Étude de f_n.

a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n; +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n; +\infty[$.
Donner le sens de variation de f_n.

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n; +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(-\sqrt{u_n}) \leq u_n - n \leq \exp(-\sqrt{n})$.

3. a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while ------- :
    n=------
print(n)
```

b) Le script affiche l'une des trois valeurs n = 55, n = 70 et n = 85. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de ln(10).

4. On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exp(-\sqrt{u_n}) \geq \exp(-\sqrt{n}) \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $u_n - n \sim_{+\infty} \exp(-\sqrt{n})$.

Exercice 2
Les deux parties sont indépendantes

Partie A - Modélisation de l'offre et de la demande en fonction du prix
On note p(t) le prix d'un bien à l'instant t, t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.
Ce prix évolue en fonction de l'offre f(t), et de la demande g(t).
On suppose que f et g sont affines par rapport aux prix :

$f(t) = -a + b.p(t)$ $\qquad$ $g(t) = c - d.p(t)$ (où a, b,c, d sont des constantes strictement positives)

et que la variation de prix par unité de temps est proportionnelle à l'écart entre l'offre et la demande.
Autrement dit, il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall\, t \geq 0,\ p'(t) = -k(f(t) - g(t))$
On note p_0 le prix à l'instant $t = 0$.
1. Montrer que p vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + k(d + b)y = k(c + a)$
2. Vérifier que (E) admet une trajectoire d'équilibre. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
3. En déduire l'expression de p(t) en fonction de t, a, b, c, d, k et p_0. Montrer que p(t) admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$ indépendante de la condition initiale.

Partie B
Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = (2t - 1)e^t$.
1. a) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée.
b) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de ces solutions.
2. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $y(t) = (at + b)e^t$ est solution de (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 3 – EDHEC 2024

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} x.\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On admet que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2.\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ converge et vaut 1.

En déduire que X a une espérance et que $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$.

3. On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geq 0$.

4. On pose $Y_2 = \frac{X}{\sqrt{2}}$ et on note G_2 la fonction de répartition de Y_2.

a) Montrer que l'on a :

$$G_2(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^2) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que Y_2 est une variable à densité et déterminer une densité de Y_2.

5. On considère un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes les deux la même loi que X. On pose $M_2 = \min(X_1, X_2)$.

Exprimer, pour tout réel x, $P(M_2 > x)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_2 suit la même loi que la variable Y_2 présentée à la question 4).

Exercice 4 – EDHEC 2023

On considère la matrice $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On note λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

1) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

2) Ecrire une fonction Python dont l'en-tête est `def vpL(lambd):` qui à un réel `lambd` associe `True` si `lambd` est une valeur propre de L et `False` sinon (on pourra s'aider de la fonction `al.matrix_rank`).

3) On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. On identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tX.L.X$?

b. Exprimer ${}^tX.L.X$ en fonction de a, b, c, d et e puis monter que l'on a :

$${}^tX.L.X = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

c. On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ.
Déterminer L.X puis ${}^tX.L.X$ en fonction de λ, a, b, c, d et e.
En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d. Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

4) a. À l'aide de la question 3) b, montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(U)$$

b. Conclure que λ_2, λ_3, λ_4, et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Exercice 5 – EDHEC 2023

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1) a. Montrer que si a = b, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

b. En déduire par l'absurde que, si a = b, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2) On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

c. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

d. Déterminer une matrice diagonale D telle que AP = PD, puis conclure que A est diagonalisable.

3) On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre 1/2.

a. Établir l'égalité :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$

b. En déduire explicitement P(X = Y).

4) Soit A(X, Y) la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité p pour que A(X, Y) ne soit pas diagonalisable.

Exercice 6 – Ecricome 2015

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose d'une urne opaque contenant N boules indiscernables au toucher, (N – 1) boules blanches et une boule noire.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages sans remise dans l'urne jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :
_ N_i l'événement < on tire une boule noire lors du i-ème tirage >.
_ B_i l'événement < on tire une boule blanche lors du i-ème tirage >.

1. Recopier et compléter le programme Python suivant pour simule cette expérience aléatoire et qu'il affiche rang d'obtention de la boule noire :

```
N =int(input(' Donner un entier naturel non nul ')) ;
x = 1;
M = N;
while …. :
    x=x+1
    M=….
print(x)
```

2. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer P(X = 1), P(X = 2) et P(X = 3).
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
4. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans l'urne. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,. . . , alors T = 4 et U = 1.
1. Préciser les valeurs prises par T.
2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geq 2$,

$$P(T = k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

3. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Calculer $P([U = 1] \cap [T = 2])$.
(b) Calculer $P([U = 1] \cap [T = k])$ pour tout entier $k \geq 3$.
5. Soit j un entier tel que $j \geq 2$.
(a) Calculer $P([U = j] \cap [T = j + 1])$.
(b) Que vaut $P([U = j] \cap [T = k])$ pour tout entier $k \geq 2$ tel que $k \neq j + 1$?
6. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
7. Calculer P(U = 1) puis déterminer la loi de U.