

Exercice 1

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln(2)}{n}\right)^n}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}} dt$.

On admet que $\forall x > 0, 0 \leq \frac{1-e^{-1}}{\sqrt{x}} - f(x) \leq \frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$$\forall t \in]-\infty; 1[; f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet que $-\frac{\ln(1-t)}{t} - 1 \sim_0 \frac{t}{2}$.

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$.

2. (a) Montrer : $\forall t \in]-\infty; 1[, \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

(b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

(c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty; 1[$.

3. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.