Devoir à la maison n°3
Pour le Jeudi 17 Octobre 2024

Exercice 1

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut 1/2 et celle d'obtenir "face" vaut également 1/2, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de {0, 1, 2}, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.

(b) Montrer que : $\forall\ n \geq 2,\ P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et soit k un réel compris entre 0 et 1.
On suppose que pour tout entier n non nul, $P(X = n) = k.P(X \geq n)$
Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = P(X \geq n)$.

1) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et de k.

2) Déterminer la loi de X. (On pourra reconnaitre une loi usuelle)