Devoir à la maison n°4

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels

quelconques.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de $\mathcal{F}$ et préciser la dimension de $\mathcal{F}$.

2. $\mathcal{G}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de $\mathcal{G}$ et préciser la dimension de $\mathcal{G}$.

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 .

b) En déduire que A n'est pas inversible.

c) Démontrer que $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

4. a) Soit $\mathcal{E}_0 = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1} \}$.

Déterminer une base u_1 de $\mathcal{E}_0$.

b) Soit $\mathcal{E}_1 = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X \}$.

Déterminer une base (u_2, u_3) de $\mathcal{E}_1$.

c) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{F}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(Dans toute cette partie, on essaiera au maximum de mener les calculs sans l'utilisation des coefficients)

5. On note $B = I_3 - A$. On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$.

a) Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.

b) Calculer AB , BA et B^2 .

c) A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

d) On suppose que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

La formule précédente est-elle aussi valable pour $n = -1$?