

## Devoir à la maison n°5

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $p$  un réel de  $]0; 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On dispose de deux urnes, l'urne  $U$  qui contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et l'urne  $V$  qui contient des boules blanches en proportion  $p$ .

On pioche une boule au hasard dans  $U$  et on note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si  $X$  prend la valeur  $k$ , on pioche  $k$  boules dans  $V$ , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où  $n = 1$ , reconnaître la loi de  $Y$ .

*On revient au cas général.*

2. Reconnaître la loi de  $X$  et donner son espérance et sa variance.

3. Soit  $k$  un élément de  $[[1, n]]$ . Reconnaître la loi de  $Y$ , conditionnellement à l'événement  $(X = k)$ , et en déduire, en distinguant les cas  $0 \leq i \leq k$  et  $k < i$ , la probabilité  $P_{(X=k)}(Y = i)$ .

4. On rappelle qu'après la commande `import numpy.random as rd`, les fonctions Python suivantes permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

`rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[[a; b]]$ .

`rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n, p$

`rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$

`rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a$ .

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables  $X$  et  $Y$ .

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
```

```
p=float(input('entrez la valeur de p : '))
```

```
X = _____
```

```
Y = _____
```

5. (a) Justifier que l'ensemble  $Y(\Omega)$  des valeurs prises par  $Y$  est égal à  $[[0, n]]$ , puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

(b) Écrire, pour tout  $i$  de  $[[1; n]]$ , la probabilité  $P(Y = i)$  sous forme d'une somme de  $n-i+1$  termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit  $i$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $1 \leq i \leq k \leq n$ . Montrer l'égalité :  $i \cdot \binom{k}{i} = k \cdot \binom{k-1}{i-1}$ .

(b) Établir ensuite que  $Y$  possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

(c) En déduire que  $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$ .