Devoir à la maison n°6

Exercice 1

On admet le résultat suivant : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

1) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

2) a) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, $u_1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$

3) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

4) a) Etablir l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on suppose qu'on a importé la bibliothèque `numpy.random` de la manière suivante :

```
import numpy.random as rd
```

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité 2/3 et Face avec la probabilité 1/3.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a. Décrire les événements [X = 0], [X = 1], [X = 2] puis calculer leurs probabilités.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place n + 1 boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.

On pose V = X – U.

2. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant [X = n].

c. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P([X = n]) \quad \text{puis} \quad P([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

e. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

f. X et U sont-elles indépendantes ?

3. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant [X = n].

c. En déduire la loi de V.

d. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

4. Que vaut Cov(U, V) ? En déduire Cov(X, U).

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de]0;1[.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité 2/3 et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus.
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus.
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.

7. Simulation informatique

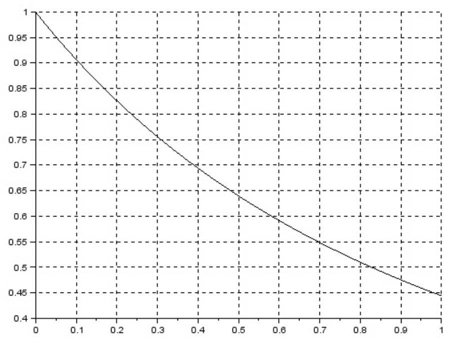
a. Écrire une fonction Python d'en-tête def simule_X() qui simule la variable aléatoire X.

b. Écrire une fonction Python d'en-tête def simule_Y()qui, prenant en argument un réel p de]0; 1[, simule la variable aléatoire Y .

c. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p) :
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(N) :
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y :
            r = r + 1/N
    return r
```

d. On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

8. a. Montrer : $P([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n])P([Y \geq n])$.

b. Déduire des résultats précédents : $P([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$.

c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.