Devoir à la maison n°7

Exercice 1

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) C est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de C.
2) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de C et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

On a donc en particulier, $\forall x \geq 0$, $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $g_n(x) =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.
c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!} g_n(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
b) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_n(x)dx$ est-elle convergente ?

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$.

a) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?
b) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.
c) Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$.
d) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).
e) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.