

Devoir Surveillé n°2
Mercredi 02 Octobre 2024
3 heures

Exercice 1 – EML 2009

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

I. Etude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Justifier que f est de classe C^1 sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- c) On admet que $x - e^x + 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$. Montrer que f est dérivable en 0 déterminer $f'(0)$.
2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$u(x) = (1 - x) e^x - 1$$
- b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
- e) Dresser le tableau des variations de f .
- f) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II – Etude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

2. a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[; e^{2x} - 2x \cdot e^x - 1 \geq 0$

- b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

- c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

- d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |1 - \alpha|$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

5. On admet que $|1 - \alpha| \leq \frac{1}{3}$ et que $\frac{9\ln(10) - \ln(3)}{\ln(2)} \approx 28,31$.

Déterminer un entier n tel que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-9} près.

6. La série $\sum_{n \geq 0} (u_n - \alpha)$ est-elle convergente ?

Exercice 2 – EML 2018

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b; +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n+1})$ converge et déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})$ en fonction de b .

Partie III : Etude d'une deuxième suite

On pose $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \ln(v_n)$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $v_n \geq 1$.

7. a. Déterminer la ou les limite(s) réelle(s) possible(s) de (v_n) .
b. Déterminer la limite de (v_n) .

Exercice 3 – EML 2024

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note C_k la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0 .
2. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k .
- b) Déterminer explicitement u_1 .

3. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a : $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$.

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

4. a) Soit $k \geq 1$ un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}.$$

- b) En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

5. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$?

Exercice 4 (Extrait HEC 2016)

Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $] -\infty; 1[\setminus \{0\}$ par :

$$S_t(r) = (at^r + 1 - a)^{1/r}$$

- (a) On pose $H_t(r) = \ln(S_t(r))$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0 .
- (b) Pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ fixé, on pose :

$$N_{(x,y)}(r) = y.S_z(r) \quad \text{et} \quad F(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} N_{(x,y)}(r), \quad \text{où } z = \frac{x}{y}.$$

Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a $F(x, y) = x^a y^{1-a}$ (fonction de production de Cobb-Douglas).