Devoir Surveillé n°4
Mercredi 04 Décembre 2024
3 heures

Exercice 1 – Ecricome 2019

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

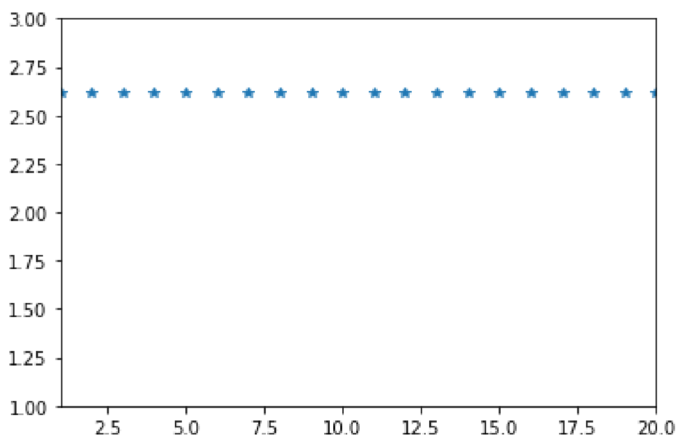
On admet que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
On admet également que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
On admet enfin que $\forall\ n \geq 1,\ v_n \leq 3$.
a) Écrire une fonction Python d'en-tête def h(n,x): qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{*+}$ en entrée.
b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
def v(n) :
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10**(-5) :
        c=(a+b)/2
        if h(n,c) <4 :
            …
        else :
            …
    return …
```

c) À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=range(1,21)
Y=np.zeros(20)
for k in range(20):
    Y[k]=v(k+1)**(k+1)
plt.xlim(1,20);plt.ylim(1,3);
plt.plot(X,Y);plt.show()
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

Exercice 2 – Ecricome 2020

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie A : Étude du cas où a = 1

Dans toute cette partie, on suppose que a = 1.

1. Expliciter la matrice M, puis déterminer le rang de $M - I_3$.

2. Calculer $(M - I_3)^2$. En déduire un polynôme annulateur de M.

3. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, exprimer M^{-1} comme combinaison linéaire de I_3 et M.

4. a) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_nM + b_nI_3$

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

c) En déduire l'expression des coefficients de M^n en fonction de n.

Partie B : Étude du cas où a = 0

Dans cette partie, on suppose que a = 0.

4. Soit $\mathcal{F} = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, MX = X \right\}$. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{F}$.

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.

On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

Soit u = (1, 1, 1), v = (1, 0, 1) et w = (1, 1, 0).

6. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

7. Calculer f(u), f(v).

8. Calculer f(w) et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

9. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T.

10. a) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $M = P.T.P^{-1}$.

b) Déterminer P^{-1}.

11. a) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) La formule est-elle encore valable pour n = -1 ?

12. Déterminer l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 3 – EDHEC 2020

Rappels sur la transposée :
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
La transposée de A, notée ${}^tA$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :
${}^tA = (b_{i,j})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq n}$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $b_{i,j} = a_{j,i}$
Propriétés :
$\forall A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
${}^t({}^tA) = A$ ${}^t(A + A') = {}^tA + {}^tA'$
${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$ ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que f(M) est une matrice antisymétrique.
(b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas n = 3 et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. a) Calculer f(J), f(K) et f(L), puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
b) En déduire une base de Im(f) ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
c) Déterminer la dimension de Ker(f), puis en donner une base.
5. Écrire la matrice F de la famille (f(J), f(K), f(L)) dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans {-1; 0}.
6. On note I_d l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de f + Id