Devoir Surveillé n°6
Mercredi 29 Janvier 2025
2 heures

Exercice 1 (d'après Ecricome 2020)

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 – EML 2023

Partie I - Réduction d'une première matrice

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

c) Donner une base de E_2.

d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

2. a) Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II - Une seconde matrice

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Déterminer les valeurs propres de B.
5. La matrice B est-elle diagonalisable ?
6. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

Exercice 3 –d'après EML 2012
Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$ est convergente.

On admet dans la suite que $I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

2. Calculer la dérivée de l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\phi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$

En déduire : $I_1 = a^2$.

3. a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^t x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = -a^2 t^{n-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) + (n-1)\, a^2 \int_0^t x^{n-2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$$

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1)\, a^2 I_{n-2}$.
c) Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx$ converge et vaut 1.
5. Soit G_a la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_a(x) = \int_{-\infty}^{x} g_a(t)dt$.
Déterminer l'expression de $G_a(x)$ en fonction de x.
6. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x.g_a(x)dx$ converge et vaut $a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
7. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 4 – d'après HEC 2021
Soit J un intervalle. Soit f une fonction définie positive et continue sur J.
On suppose que pour tout $t \in J$, X_t est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit Z la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Z = k) = \int_J P(X_t = k).f(t)dt$.

1) *Un premier exemple* On considère dans cette question que $J = [0\,;1]$. On pose $f(t) = 1 \ \forall t \in [0\,;1]$.
On suppose enfin que $\forall t \in]0\,;1[$, X_t suit une loi géométrique de paramètre t. (on considèrera que la formule pour $P(X_t = k)$ s'étend de manière naturelle pour $t = 0$ et $t = 1$)

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

2) *Un deuxième exemple* On suppose que $J = [0\,; +\infty[$ et que pour $t \geq 0$, la loi de X_t suit la loi de Poisson de paramètre t et $f(t) = \lambda.e^{-\lambda t}$ (avec $\lambda > 0$).

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Z = k) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda.e^{-(\lambda+1)t}dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx$

b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx = 1$.

c) Déterminer la loi de Z. Reconnaitre la loi de Z + 1.
d) En déduire E(Z).