

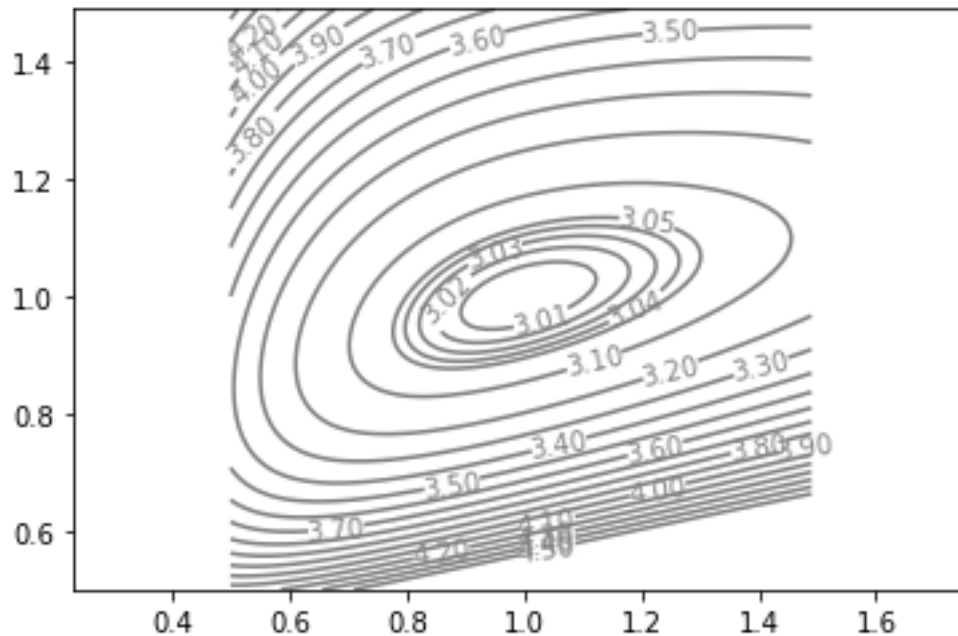
Exercice 1 – Ecricome 2019

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}, f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

L'exercice consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f .

1) On utilise Python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f . On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. a) Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.

b) Calculer les dérivées partielles premières de f , puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A , que l'on déterminera.

c) Calculer les dérivées partielles secondes de f , puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est

la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum, et donner sa valeur.

Exercice 2

On considère un graphe orienté G , de sommets s_1, s_2 et s_3 et de matrice d'adjacence $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Représenter le graphe G .
- 2) A l'aide d'une décomposition bien choisie, déterminer l'expression de A^n en fonction de n .
- 3) Combien existe-il de chemins de longueur 4 entre les sommets s_1 et s_3 ?

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = |X|$.

- 1) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- 2) Montrer que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y .

Exercice 4 – d'après EML 2016

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$

On admet que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

On admet que $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

On admet enfin que X admet une espérance égale à 0, et que X admet également un écart-type non nul, que l'on notera σ .

Dans tout cet exercice, on supposera qu'on a importé les bibliothèques `numpy` et `numpy.random` sous la forme suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

1. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y' = -\ln(Y)$. Déterminer la fonction de répartition de Y' . (On dira que Y' suit une loi de Gumbel)

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f .

2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $W_n = T_n - \ln(n)$.

a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n .

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P(W_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

c) En déduire que la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

3. On pose $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

a) De quelle valeur s'approche Z_n quand n est très grand ?

b) Déterminer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$ en fonction de σ .

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. (On donne $\Phi(1) \approx 0,8413$)

4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0;1[$. On pose $V = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F_V(x) = F_U\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$.

b. En déduire que V suit la même loi que X .

c. Ecrire un programme Python qui simule la loi de X .

d. Ecrire une fonction en Python qui à un entier n associe une simulation de Z_n .