Concours blanc n°1 - Correction

Exercice 1

Partie I – Etude de la fonction f

1. f est continue sur $]0; +\infty[$ comme différence et produit de fonctions continues.
En 0 : $\lim\limits_{t \to 0} t^2\ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$.
Donc f est continue en 0. Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.
Remarque : Attention, une composée est une fonction du type : $t \longmapsto v(u(t))$ (Ex : $t \longmapsto \exp(-t^2/2)$). Ce n'est pas le cas ici.

2.f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ comme différence et produit de fonctions de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.
Et $\forall\, t > 0$, $f'(t) = 2t - (\ln(t) + 1) = 2t - \ln(t) - 1$. $\quad f''(t) = 2 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{2t-1}{t}$.

t	0	1/2	$+\infty$
f ''(t)	–	0	+
f '(t)	↘	ln(2)	↗

$f'(1/2) = 1 - \ln(1/2) - 1 = \ln(2)$

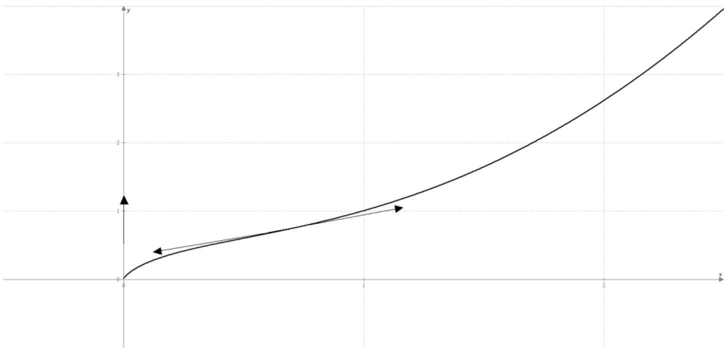
Le minimum de f ' sur $]0; +\infty[$ est $\ln(2) > 0$. Donc f ' est strictement positive sur $]0; +\infty[$.
Si $t > 0$, $f(t) = t^2\left(1 - \dfrac{\ln(t)}{t}\right)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ par croissances comparées. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

t	0		$+\infty$
f '(t)	|	+	
f (t)	0	↗	$+\infty$

4. (a) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2 - t\ln(t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} t - \ln(t) = +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0 et C admet en O une tangente verticale.

(b) f '' s'annule en changeant de signe en $\dfrac{1}{2}$ donc C admet un point d'inflexion de coordonnées : $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$,
avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}25 + 0{,}35 \approx 0{,}6$. (Rappel : on a trouvé : $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(2) \approx 0{,}7$)

5. f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.
Comme $1 \in [0; +\infty[$, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.
De plus $f(1) = 1$, donc cette solution est 1.



Partie II : Etude d'une suite récurrente

6. On procède par récurrence :
_ $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

_ supposons qu'à un rang n, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. $\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$.

f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \le f(u_n) \le f(1)$

Or on a vu que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \ge \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} \le f\left(\dfrac{1}{2}\right) \le u_{n+1} \le 1$ $\quad u_{n+1} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

7. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$: _ $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \ge \dfrac{1}{2}$ donc $u_1 \ge u_0$.

_ supposons qu'à un certain rang n, $u_{n+1} \ge u_n$.
f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $f(u_{n+1}) \ge f(u_n)$ $\quad u_{n+2} \ge u_{n+1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. (u_n) est croissante.
Ou : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n\ln(u_n) - u_n = u_n(u_n - \ln(u_n) - 1)$.
Par concavité de la fonction ln (en dessous de sa tangente en 0), on sait que $\forall\, x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$
donc $\ln(u_n) \leq u_n - 1$ $\quad u_n - \ln(u_n) - 1 \geq 0$.
Comme $u_n \geq 0$, on a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

8. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $L \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

f est continue sur cet intervalle, donc d'après le théorème du point fixe, on a : $f(L) = L$

$L = 0$ est impossible car $L \geq \frac{1}{2}$ donc $f(L) = L \Leftrightarrow L^2 - L\ln(L) = L$

$\Leftrightarrow L(L - \ln(L) - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $L = 0$ (impossible) ou $L - \ln(L) - 1 = 0$.
Posons g la fonction définie sur $]0;1]$ par : $g(t) = t - \ln(t)$. Alors $g(L) = 1$.

g est dérivable sur $]0; 1]$ et $\forall\, t \in]0;1]$, $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} \leq 0$.

t	0	1
$g'(t)$	$-$	
$g(t)$	$\searrow$	1

$g(1) = 1$. De plus g est continue et strictement décroissante sur $]0;1]$, donc l'équation $g(x) = 1$ n'admet qu'une seule solution. Donc $g(L) = 1 \Leftrightarrow L = 1$. $\quad$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

9.
```
import numpy as np
n=0;u=1/2;
while 1-u>10**-4:
  n=n+1;
  u=u**2-u*np.log(u)
print(n)   (On trouve N = 19994)
```

Exercice 2

1. a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall\, x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $n > 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$

$\ln(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $f_n(x) \sim_{+\infty} x$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ $\qquad f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$

x	0		n		$+\infty$
$x - n$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n - n\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Si $n \geq 3$ $\ln(n) \geq \ln(3) > 1$ donc $n(1 - \ln(n)) < 0$
Sur $]0;+\infty[$, f_n est continue et strictement décroissante. De plus $0 \in [n - n\ln(n); +\infty[$. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $]0;n[$.
De la même manière, l'équation admet une unique solution v_n sur l'intervalle $]n; +\infty[$.
Donc $0 < u_n < n < v_n$.
2. a) $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0$ $\quad f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ car $n \geq 3$ $\quad f_n(u_n) = 0$
Donc $f_n(e) \leq f_n(u_n) \leq f_n(1)$. f_n est décroissante sur $]0;n]$, donc $1 \leq u_n \leq e$.
b) $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$ $\quad u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$
Donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
$u_{n+1} \geq 1$ donc $\ln(u_{n+1}) \geq 0$ donc $f_n(u_{n+1}) \geq 0 \Leftrightarrow f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n)$.
f_n étant décroissante sur $]0;n]$, $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.
c) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc (u_n) converge vers un réel L.

Or $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$. $1 < u_n < e$ donc $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{e}{n}$ donc $\dfrac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \dfrac{e}{n}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 0$.

$u_n = e^{\ln(u_n)}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$ donc $\ln(1 + (u_n - 1)) \sim_{+\infty} u_n - 1$ (car $\ln(1 + X) \sim_0 X$)

$\Leftrightarrow \ln(u_n) \sim_{+\infty} u_n - 1$ Donc $u_n - 1 \sim_{+\infty} \ln(u_n)$.

Or $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{n}$ donc $u_n - 1 \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3 1. Etude du cas n = 3

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Donc $(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)$

b) M et I_3 commutent donc $M^2 + 2MI_3 + I_3{}^2 = 3M + 3I_3$ $M^2 - M - 2I_3 = 0$

$M^2 - M = 2I_3$ $\dfrac{1}{2} M^2 - \dfrac{1}{2} M = I_3$ $M\left(\dfrac{1}{2} M - \dfrac{1}{2} I_3\right) = I_3$ donc M est inversible et

$M^{-1} = \dfrac{1}{2}(M - I_3) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $MX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$

d) De même $MX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$ Donc $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2. Cas général a) Par récurrence sur k :

_ $(J_n)^1 = J_n$ $n^{1-1}J_n = J_n$ donc la propriété est vraie au rang 1

_ supposons qu'à un rang k, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$

Alors $(J_n)^{k+1} = (J_n)^k J_n = n^{k-1}J_nJ_n = n^{k-1}J_n{}^2$

Or $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ_n$ donc $(J_n)^{k+1} = n^{k-1}nJ_n = n^kJ_n$

Donc $\forall k \geq 1$, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$

b) On voit que $M_n = J_n - I_n = J_n + (-I_n)$

c) Les matrices J_n et $(- I_n)$ commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton,

$(M_n)^k = \left(J_n + (-I_n)\right)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(J_n)^i(-I_n)^{k-i} = \binom{k}{0}(J_n)^0 (-I_n)^k + \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}J_n(-1)^{k-i}I_n{}^{k-i}$

$= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i}$

$= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}\right) J_n = (-1)^k I_n + c_k J_n$, avec $c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}$.

d) $c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i}(-1)^{k-i} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i}(-1)^{k-i} - \binom{k}{0} n^0(-1)^k\right)$

$= \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right) = \frac{1}{n}\left((n-1)^k + (-1)^{k+1}\right)$

c) Les coefficients diagonaux de $(M_n)^k$ sont donc égaux à :

$c_k + (-1)^k = \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k + n(-1)^k\right) = \frac{1}{n}\left((n-1)^k + (n-1)(-1)^k\right)$

Les coefficients non diagonaux sont égaux à : $c_k = \frac{1}{n}\left((n-1)^k + (-1)^{k+1}\right)$.

Exercice 4

1. a) $(Y = 3) = R_1 \cap R_2 \cap B_3$ donc $P(Y = 3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(Y = n) = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n$

Les événements ne sont pas indépendants : $P(Y = n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)\ldots P_{R_1\cap\ldots\cap R_{(n-2)}}(R_{n-1})P_{R_1\cap\ldots\cap R_{(n-1)}}(B_n)$

$P_{R_1\cap\ldots\cap R_{(n-2)}}(R_{n-1})$: On a tiré $n - 2$ boules rouges, donc on a ajouté $n - 2$ rouges.

Il y alors $n + 1$ boules en tout, dont n rouges

$P_{R_1\cap\ldots\cap R_{(n-1)}}(B_n)$: On a tiré $n - 1$ boules rouges, donc on a ajouté $n - 1$ rouges.

Il y alors $n + 2$ boules en tout, dont $n + 1$ rouges

$P(Y = n) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

c) $P(Y = n) \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$ donc $n.P(Y = n) \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n}$ diverge, et les séries sont à termes positifs, donc la série $\sum_{n\geq 1} n.P(Y = n)$ diverge. Donc Y n'admet pas d'espérance. Donc Y n'admet pas non plus de variance.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(Y \leq n) = \sum_{i=1}^{n} P(Y = i)$.

```
n=int(input('Donner la valeur de n : '))
s=0;
for i in range(1,n+1):
    s=s+2/((i + 1)*(i+2))
print(s)
```

2. a) De même $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(Z = n) = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n$

$P(Z = n) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \ \ldots \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$

Sachant $B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}$: il y a $n + 1$ boules, $n - 1$ bleues et 2 rouges

Sachant $B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}$: il y a $n + 2$ boules, n bleues et 2 rouges

b) Donc $n.P(Z = n) \sim_{+\infty} \frac{4}{n^2}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2}$ converge, et les séries sont à termes positifs, donc la série $\sum_{n\geq 1} n.P(Z = n)$ converge absolument. Donc Z admet une espérance.

Par contre, $n^2.P(Z = n) \sim_{+\infty} \frac{4}{n}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{4}{n}$ diverge, et les séries sont à termes positifs, donc la série $\sum_{n\geq 1} n^2.P(Z = n)$ diverge. Donc Z n'admet pas de variance.

Exercice 5

Partie I

1. a) Considérons X comme le rang du premier succès lors d'épreuves indépendantes.

Alors $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = P(X > k) = P(\text{"Les k premiers essais sont des échecs"}) = P(\overline{S_1} \cap ... \cap \overline{S_k}) = (1-p)^k$

b) $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1 - p$.   ($p \neq 1$ donc $R_X(k-1) \neq 0$)

2. a) $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X > k) = P(X > k-1) - P(X > k) = R_X(k-1) - R_X(k)$.

b) Si X et Y suivent la même loi, alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ R_Y(k) = P(Y > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(Y = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) = P(X > k) = R_X(k)$$

Inversement, si $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $R_Y(k) = R_X(k)$

Alors $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = R_Y(k-1) - R_Y(k) = R_X(k-1) - R_X(k) = P(X = k)$ ($k - 1 \in \mathbb{N}$ car $k \in \mathbb{N}^*$)

Donc Y suit la même loi que X.

Donc Y et X suivent la même loi si et seulement si $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $R_Y(k) = R_X(k)$

Partie II

3. a) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!} = \dfrac{a(n+1) - b}{(n+1)!} = \dfrac{an + a - b}{(n+1)!}$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ donc $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$ (par somme télescopique)

Donc $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N = 1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

4. a) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} (n+1)P(X = n) = \sum_{n \geq 1} (n+1) \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}$ (avec $i = n - 1$) $= \displaystyle\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} 1^i$

On reconnait la série exponentielle qui converge absolument.

Donc d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et $E(X+1) = e^1 = e$.

$X = (X+1) - 1$ donc X admet une espérance et $E(X) = E(X+1) - 1 = e - 1$.

b) De même,

$$\sum_{n \geq 1} (n+1)(n-1)P(X = n) = \sum_{n \geq 1} (n+1)(n-1)\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{(n-1)!} = \frac{0}{0!} + \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{(n-1)!}$$

$= \displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}$ (avec $i = n - 2$)

Donc d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $(X+1)(X-1)$ admet une espérance et $E\big((X+1)(X-1)\big) = e$.

Or $X^2 = (X^2 - 1) + 1$ donc X^2 admet une espérance et $E(X^2) = E(X^2 - 1) + 1 = e + 1$.

Donc d'après la formule de Huygens, X admet une variance et

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e + 1 - (e-1)^2 = e + 1 - (e^2 - 2e + 1) = 3e - e^2 = e(3 - e)$

Partie III

5. $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k) = P(X > k)$ = P("L'appareil fonctionne encore après k années")

= P("L'appareil fonctionne après (k – 1) année et elle ne tombe pas en panne l'année k")

$= P((X > k-1) \cap \overline{P_k}))$ avec P_k : l'appareil tombe en panne l'année k

$= P(X > k-1)P_{(X > k-1)}(\overline{P_k}) = R_X(k-1).(1 - \alpha_k)$ d'après l'énoncé.

6. Par récurrence sur k :

_ pour k = 1 : $R_X(1) = P(X > 1)$ = P("l'appareil fonctionne à la fin de la première année) = $1 - \alpha_1$

$\prod_{i=1}^{1} (1 - \alpha_i) = (1 - \alpha_1)$ donc la propriété est vraie pour k = 1

_ supposons qu'à un rang k, $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i)$.

Alors $R_X(k + 1) = R_X(k).(1 - \alpha_{k+1})$ (d'après la question précédente)

$$= \prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i).(1 - \alpha_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \alpha_i)$$

Donc pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i)$.

(On peut aussi remarquer que $(X > k) = \overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_k}$)

7. Donc $\forall\, k \geq 1$, $P(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k) = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - \prod_{i=1}^{k} (1 - \alpha_i)$

$$= \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i)\right)(1 - \alpha_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i)\right)(1 - (1 - \alpha_k)) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i)\right).\alpha_k$$

8. a) Si $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = p$, alors d'après la formule précédente,

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - p)\right)p = (1 - p)^{k-1}p$. Donc $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$

b) Si $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = \dfrac{k}{k+1}$, alors d'après la formule précédente,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right)\right).\frac{k}{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{(i+1) - i}{i+1}\right).\frac{k}{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1}\right).\frac{k}{k+1}$$

$= \dfrac{1}{2 \times \ldots \times k} \times \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{k}{(k+1)!}$ On retrouve la loi de la question 4.