Correction du C.B. n°2 niveau 2

Exercice 1

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 \\ y = -mx \text{ (car } m \neq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{m^2}z \\ \frac{2}{m}z = 0 \\ y = -mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc Ker(f) = {0}. f est un endomorphisme injectif (en dimension finie), donc f est bijective.
Donc Im f = $\mathbb{R}^3$ (ou théorème du rang) et M est inversible.

2) a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = 2I + M$.

b) $M^2 - M - 2I = 0$ donc $X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de M.

c) $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$ Les racines sont -1 et 2 donc les seules valeurs propres possibles de M sont -1 et 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $(M + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x + my + z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -m^2x - my.$

Donc -1 est valeur propre et $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -m^2x - my \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right)$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une base de E_{-1} et $\dim(E_{-1}) = 2$.

$(M - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2x + my + z = 0 \\ m^2x - 2my + z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2x + my + z = 0 \\ -3my + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 3my - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2x + 2my = 0 \\ z = my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$ donc $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} \right)$ (vecteur non nul donc base de E_2).

$\dim(E_{-1}) + \dim(E_2) = 3$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres donc d'après la formule de changement de base,

$M = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -m^2 & -m & m^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $M^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$, avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

4. Soit P et Q les matrices de p et q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$P = \frac{1}{3}(M + I)$ $Q = -\frac{1}{3}(M - 2I)$ $PQ = -\frac{1}{9}(M + I)(M - 2I) = -\frac{1}{9}(M^2 - M - 2I) = 0$ d'après 2.(b)

De même $QP = -\frac{1}{9}(M - 2I)(M + I) = 0$.   Donc pq = 0 et qp = 0.

$P^2 = \frac{1}{9}(M + I)^2 = \frac{1}{9}(M^2 + 2M + I) = \frac{1}{9}(M + 2I + 2M + I) = \frac{1}{9}(3M + 3I) = P$ donc $p^2 = p$ et par récurrence immédiate, $p^n = p$ $\forall n \geq 1$. ($p^0 = Id$)

$Q^2 = \frac{1}{9}(M - 2I)^2 = \frac{1}{9}(M^2 - 4M + 4I) = \frac{1}{9}(M + 2I - 4M + 4I) = \frac{1}{9}(-3M + 6I) = Q$.

Donc de même, $q^n = q$ $\forall n \geq 1$ ($q^0 = Id$).

Ou mieux si on se place dans la base B' :

$P' = \frac{1}{3}(D + I) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q' = -\frac{1}{3}(D - 2I) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il est alors évidement que $P'Q' = 0$ $Q'P' = 0$ $P'^n = P'$ et $Q'^n = Q'$.

(b) Dans la base B : On voit que $2P - Q = M$ et $2P$ et Q commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton,

$M^n = (2P - Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2P)^k(-Q)^{n-k}$

Pour $n \geq 2$, $M^n = \binom{n}{0}(2P)^0(-Q)^{n-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(2P)k(-Q)^{n-k} + \binom{n}{n}(2P)^n(-Q)^{n-n} = 1 \times I \times (-1)^nQ + 0 + 1 \times 2^nP \times I$

$= (-1)^nQ + 2^nP$ donc $f^n = 2^np + (-1)^nq$

Pour $n = 0$ $f^0 = Id$ $2^0p + (-1)^0q = p + q = Id$ l'égalité reste vraie

Pour $n = 1$ $f^1 = f$ $2^1p + (-1)^1q = 2p - q = f$ l'égalité reste vraie. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^np + (-1)^nq$.

Dans la base B' : $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^nQ' + 2^nP'$

Donc $f^n = (-1)^nq + 2^np$

(c) Donc $f^n = \frac{1}{3}\left(2^nf + 2^nId - (-1)^nf + (-1)^n2Id\right) = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)f + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)Id$

Donc $M^n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)M + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)I$ donc $a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ et $b_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$.

Ou : Montrons par récurrenc qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_nM + b_nI$

_ pour $n = 0$: $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent

_ supposons qu'à un rang n, $M^n = a_nM + b_nI$

Alors $M^{n+1} = M^n.M = (a_nM + b_nI)M = a_nM^2 + b_nM = a_n(2I + M) + b_nM = (a_n + b_n)M + 2a_nI$

Donc $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$ conviennent.

Conclusion : Avec $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_nM + b_nI$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$.

(a_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2. Equation caractéristique : $x^2 - x - 2 = 0$ $(x - 2)(x + 1) = 0$.

Donc il existe deux réels α et β tels que $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$

$a_1 = a_0 + b_0 = 1$ $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1/3 \\ \alpha = 1/3 \end{cases}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$ et $b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2.2^n + (-1)^n) - \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right)$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que M est inversible, donc M^n aussi. A-t-on $M^{-n} = 2^{-n}P + (-1)^{-n}Q$? $M^{-n} = (M^n)^{-1}$.

$\left(2^nP + (-1)^nQ\right)\left(2^{-n}P + (-1)^{-n}Q\right) = P + 0 + 0 + Q = I$ donc $(M^n)^{-1} = 2^{-n}P + (-1)^{-n}Q$

De la même manière qu'en question c), on a donc : $M^{-n} = \frac{1}{3}(2^{-n} - (-1)^{-n})M + \frac{1}{3}(2^{-n} + 2(-1)^{-n})I$.

L'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. a) $\forall\, t \geq 0$, $P(T > t) = \int_t^{+\infty} f_T(x)dx$

La fonction f_T est positive et continue sur $[t\,;+\infty[$. Donc si $\int_t^{+\infty} f_T(x)dx = 0$ alors la fonction f_T est identiquement nulle sur $[t\,;+\infty[$. Or on sait que cette fonction est strictement positive.

Donc il y a contradiction.

Donc $\forall\, t \geq 0$, $P(T > t) > 0$ *(d'où l'existence des probabilités conditionnelles des questions suivantes)*

b) $\forall\, h > 0$, $\forall\, t \geq 0$, $K_{T,t}(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{P((T \leq t+h) \cap (T > t))}{P(T > t)} = \dfrac{1}{h}\dfrac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} = \dfrac{1}{h}\dfrac{F_T(t+h) - F_T(t)}{1 - F_T(t)}$

f_T est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall\, t \geq 0$, $F_T'(t) = f_T(t)$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t)$. Donc $\lim\limits_{h \to 0^+} K_{T,t}(h)$ existe et vaut $\dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$.

c) On a donc $\forall\, t \geq 0$, $\int_0^t \gamma_T(x)dx = \int_0^t \dfrac{f_T(x)}{1 - F_T(x)}dx = \Big[-\ln(\left|1 - F_T(x)\right|)\Big]_0^t = -\ln(1 - F_T(t)) + \ln(1 - F_T(0))$

(car $1 - F_T(x) = P(T > x) > 0$)

T est à valeurs strictement positives donc $F_T(0) = 0$.

Donc $\int_0^t \gamma_T(x)dx = -\ln(1 - F_T(t))$ $\qquad -\int_0^t \gamma_T(x)dx = \ln(1 - F_T(t))$

$\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) = 1 - F_T(t)$ $\qquad F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)$.

Donc $\forall\, t \geq 0$ et $\forall\, \theta \geq t$, $P_{[T>t]}([T \leq \theta]) = \dfrac{P(t < T \leq \theta)}{P(T > t)} = \dfrac{F_T(\theta) - F_T(t)}{1 - F(t)}$ (car $\theta \geq t$)

$$= \frac{1 - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)dx\right) - \left(1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)\right)}{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)} = \frac{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)dx\right)}{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right)}$$

$= 1 - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)dx + \int_0^t \gamma_T(x)dx\right) = 1 - \exp\left(-\int_t^\theta \gamma_T(x)dx\right)$

2. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \gamma_T(x)dx$ est convergente, alors par continuité de la fonction exp,

$\lim\limits_{t \to +\infty} F_T(t) = 1 - \exp\left(\int_0^{+\infty} \gamma_T(x)dx\right)$.

Or F_T est une fonction de répartition, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F_T(t) = 1$. $\exp\left(\int_0^{+\infty} \gamma_T(x)dx\right) = 0$, ce qui est impossible.

Donc l'intégrale est divergente.

$\forall\, t \geq 0$, $\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) > 0$ donc $1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) < 1$ donc $F_T(t) < 1$

De plus, de la même manière qu'à la première question, γ_T est continue sauf en un nombre fini de points et strictement positive donc $\forall\, t > 0$, $\int_0^t \gamma_T(x)dx > 0$ donc $\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) < 1$

donc $1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)dx\right) > 0$ $\qquad$ Donc $0 < F_T(t) < 1$.

3. Si γ_T est constante, égale à λ ;

$\forall\, t \geq 0$, $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda dx\right) = 1 - \exp(-\lambda(t - 0)) = 1 - \exp(-\lambda t)$.

Et T étant à valeurs positives, $F_T(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

4. $\forall\, t \geq 0$, $F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda x dx\right) = 1 - \exp\left(-\left[\lambda\dfrac{x^2}{2}\right]_0^t\right) = 1 - \exp\left(-\dfrac{\lambda t^2}{2}\right)$ et $F_T(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

On voit que F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

$F_T'(t) = \begin{cases} -\dfrac{-2\lambda t}{2}\exp\left(-\dfrac{\lambda t^2}{2}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$ $\quad$ donc une densité de T est $f_T(t) = \begin{cases} \lambda t.\exp\left(-\dfrac{\lambda t^2}{2}\right) \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$.

Problème Partie 1

1. $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_i = T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \ldots + (T_i - T_{i-1}) = T_i$ (sommes télescopiques)

Δ_i représente le temps mis par la carte C_N pour passer de la position $N - i + 1$ à la position $N - i$.

2. $(\Delta_1 > n)$ = "lors des n premières insertions, C_N n'a pas changé de place"

= "les n premières insertions ont lieu entre les places 1 et $N - 1$"

donc $P(\Delta_1 > n) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ (insertions indépendantes)

$\Delta_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$\forall\ i \geq 1,\ P(\Delta_i = i) = P(\Delta_i > n-1) - P(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{N-1}{N}\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\frac{1}{N}.$

Donc $\Delta_1 \longrightarrow \mathcal{G}(1/N)$.

On peut aussi remarquer que Δ_1 correspond à la première fois que l'insertion est en place N (probabilité 1/N) et que les insertions sont indépendantes donc $\Delta_1 \longrightarrow \mathcal{G}(1/N)$.

3) a) De même $(\Delta_i > n)$ = "la carte C_N reste plus de n étapes en position $N - i + 1$"

= "pendant n étapes, l'insertion s'effectue entre les places 1 et $N - i$"

Donc $P(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$ et $\forall\ n \geq 1,\ P(\Delta_i = n) = P(\Delta_i > n-1) - P(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-1} - \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n}$

$= \left(\frac{N-i}{N}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{N-i}{N}\right) = \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{n-1}\frac{i}{N}$ donc $\Delta_i \longrightarrow \mathcal{G}(i/N)$ (Ou : Δ_i = 1ère fois que l'insertion a lieu entre les places $N - i + 1$ et N)

b) Donc $E(\Delta_i) = \frac{1}{\frac{i}{N}} = \frac{N}{i}$ $\quad V(\Delta_i) = \frac{1 - \frac{i}{N}}{\left(\frac{i}{N}\right)^2} = \frac{N-i}{N} \times \frac{N^2}{i^2} = N\,\frac{N-i}{i^2}.$

4) a) $T_2 = \Delta_1 + \Delta_2$ donc $\forall\ n \geq 2\ P(T_2 = n) = \sum\limits_{k \geq 1,\ n-k \geq 1} P((\Delta_1 = k) \cap (\Delta_2 = n-k))$

$= \sum\limits_{k=1}^{n-1} P(\Delta_1 = k)P(\Delta_2 = n-k)$ car Δ_1 et Δ_2 sont indépendantes.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k = \sum\limits_{k'=0}^{n-2}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{k'+1} = \frac{1-1/N}{1-2/N}\sum\limits_{k'=0}^{n-2}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{k'}$ car $\frac{1-1/N}{1-2/N} \neq 1$

$= \frac{1-1/N}{1-2/N}\,\frac{1 - \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1-1/N}{1-2/N}} = \frac{N-1}{N-2} \times \frac{1 - \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}}{1 - \frac{N-1}{N-2}}$

$= \frac{N-1}{N-2} \times \left(1 - \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1}\right) \times \frac{N-2}{-1} = (N-1)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right] = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right]$

c) $P(T_2 = n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-k-1}\frac{2}{N} = \frac{2}{N^2} \times \frac{1}{1-1/N} \times \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k$

$= \frac{2}{N^2} \times \frac{1}{1-1/N} \times \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-1} N\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right] = \frac{2}{N}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right]$

$= \frac{2}{N}\left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-1}\right].$

5) a) A l'instant T_1 : la carte C_N est en position $N - 1$. Une autre carte C_i est en position N.

Entre les instants T_1 et T_2, les positions n'évoluent pas.

A l'instant T_2, C_N remonte d'une place, dont l'insertion est en position $N - 1$ ou N, avec équiprobabilité.
Soit C_j la carte insérée.
_ si l'insertion est en position $N - 1$, l'ordre devient : C_N, C_j, C_i
_ si l'insertion est en position N, l'ordre devient : C_N, C_i, C_j.
Les deux situations ont donc une probabilité de 1/2.
6) a) Il y a 3! = 6 ordres possibles pour le triplet (a_1, a_2, a_3).
b) Notons C_i, C_j, C_k les 3 cartes insérées : Entre parenthèses, la position de l'insertion

A l'instant T_1 :	A l'instant T_2	A l'instant T_3	
$C_N - C_i$	$(N-1)\ C_N - C_j - C_i$	$(N-2)\ C_N - C_k - C_j - C_i$	$(N, N-1, N-2)$
		$(N-1)\ C_N - C_j - C_k - C_i$	$(N, N-2, N-1)$
		$(N)\ C_N - C_j - C_i - C_k$	$(N-1, N-2, N)$
	$(N)\ C_N - C_i - C_j$	$(N-2)\ C_N - C_k - C_i - C_j$	$(N-1, N, N-2)$
		$(N-1)\ C_N - C_i - C_k - C_j$	$(N-2, N, N-1)$
		$(N)\ C_N - C_i - C_j - C_k$	$(N-2, N-1, N)$

On voit qu'il y a équiprobabilité : chaque probabilité est de 1/6.
7) Montrons par récurrence sur i que $\forall i \in \{i, \dots, N-1\}$, à l'instant T_i, les i dernières cartes sont rangées de manière équiprobable :
_ c'est évident pour i = 1, et on l'a montré également pour i = 2 et 3.
_ supposons qu'à l'instant T_i, les i dernières cartes soient rangées de manière équiprobable :
Entre les instants T_i et T_{i+1}, la configuration n'évolue pas.
A l'instant T_{i+1}, C_N monte d'une place, dont l'insertion a lieu entre les places $N - i$ et N.
Le choix l'insertion est équiprobable, donc la place de la nouvelle carte l'est aussi.
Donc toutes les configurations sont équiprobables pour les i+1 dernières cartes.
Conclusion : En particulier pour i = N-1 : A l'instant T_{N-1} les $N - 1$ dernières cartes sont rangées de manière équiprobable.
A l'instant $T = T_{N-1} + 1$, on prend la première carte du paquet, qui est C_N, et on la place au hasard dans le paquet : toutes les cartes sont maintenant réparties de manière équiprobable.

Partie 2

8) $T = \Delta_1 + \dots + \Delta_{N-1} + 1$ et tous les (Δ_i) admettent une espérance, donc T admet une espérance et
$$E(T) = \sum_{i=1}^{N-1} E(\Delta_i) + 1 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{i} + 1 = N\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i} + \frac{1}{N}\right) = NH_N$$
De même, tous les Δ_i admettent une variance, et sont indépendants entre eux, donc T admet une variance et
$$V(T) = V(\Delta_1 + \dots + \Delta_{N-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} V(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{N^2}{i^2} - \frac{N}{i}\right) = N^2\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i^2}\right) - N\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i}\right)$$
$$= N^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i^2} - \frac{1}{N^2}\right) - N\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - \frac{1}{N}\right) = N^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i^2}\right) - NH_N.$$
9) a) $\forall k \geq 1, \forall t \in [k;k+1], k \leq t \leq k+1 \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc d'après l'inégalité de la moyenne,
$$\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}(k+1-k) \qquad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
Donc $\frac{1}{k+1} \leq [\ln(t)]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

b) i. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

Or $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (u_n) est décroissante.

ii. $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ donc $\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1)$ (somme télescopique) donc $\ln(n+1) \leq H_n$.

De même, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k))$ (i=k+1) $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq \ln(n)$ $H_n - 1 \leq \ln(n)$ $H_n \leq \ln(n) + 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c) Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n \leq 1$ or $\ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$ donc $0 \leq u_n \leq 1$.

(u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel γ. Comme $0 \leq u_n \leq 1$, on a $0 \leq \gamma \leq 1$.

10 (a) $H_N = \ln(N) + u_N$ u_N converge donc $u_N =_{+\infty} o(\ln(N))$ donc $H_N \sim \ln(N)$ et $E(T) \sim_{+\infty} N\ln(N)$.

De plus, u_N tend vers γ donc $u_N =_{+\infty} \gamma + o(1)$ donc $H_N = \ln(N) + \gamma + o(1)$ et $E(T) =_{+\infty} N\ln(N) + \gamma N + o(N)$.

(b) $\frac{V(T)}{N^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \frac{H_N}{N}$ 2 > 1 donc la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. Donc la somme partielle $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$ converge.

$\frac{H_N}{N} \sim_{+\infty} \frac{\ln(N)}{N}$ et $\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln(N)}{N} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{N \to +\infty} \frac{H_N}{N} = 0$ donc $\frac{V(T)}{N^2}$ converge et sa limite vaut $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donc $\frac{V(T)}{N^2} \sim_{+\infty} \alpha$ $V(T) \sim_{+\infty} \alpha N^2$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $H_N \geq 0$ donc $\frac{V(T)}{N^2} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \alpha$ donc $V(T) \leq \alpha N^2$.

11. a) $\left|T(\omega) - N\ln(N)\right| = \left|\left(T(\omega) - E(T)\right) + \left(E(T) - N\ln(N)\right)\right| \leq \left|T(\omega) - E(T)\right| + \left|E(T) - N\ln(N)\right|$ (inégalité triangulaire) et $\left|E(T) - N\ln(N)\right| = \left|NH_N - N\ln(N)\right| = N\left|u_N\right| \leq N \times 1$.

Donc $\left|T(\omega) - N\ln(N)\right| \leq \left|T(\omega) - E(T)\right| + N$.

Si $\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN$ alors $\left|T - E(T)\right| \geq \left|T - N\ln(N)\right| - N \geq cN - N$ $\left|T - E(T)\right| \geq (c-1)N$.

Donc $\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \subset \left(\left|T - E(T)\right| \geq N(c-1)\right)$.

b) Donc $P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq P\left(\left|T - E(T)\right| \geq N(c-1)\right) \leq \frac{V(T)}{N^2(c-1)^2}$ (d'après Bienaymé-Chebychev)

Or $V(T) \leq \alpha N^2$ donc $P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq \frac{V(T)}{N^2(c-1)^2} \leq \frac{\alpha}{(c-1)^2}$.

$\forall c > 1$, $0 \leq P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq \frac{\alpha}{(c-1)^2}$. $\lim_{c \to +\infty} \frac{\alpha}{(c-1)^2} = 0$ donc par encadrement,

$\lim_{c \to +\infty} P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) = 0$.

12) Soit $\varepsilon > 0$. $\lim_{N \to +\infty} \varepsilon\ln(N) = +\infty$ donc à partir d'un certain N, $\varepsilon\ln(N) > 1$.

D'après la question précédente, $0 \leq P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq \varepsilon N\ln(N)\right) \leq \frac{\alpha}{(\varepsilon\ln(N) - 1)^2}$ et par encadrement,

$\lim_{N \to +\infty} P\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq \varepsilon N\ln(N)\right) = 0$.

13) import numpy as np
```
import numpy.random as rd

def Init():
    return np.arange(32)



def insertion(Jeu):
    k=rd.randint(0,32)      #position où on va insérer la carte du dessus
    cartedessus=Jeu[0]
    if k>0:
        for i in range(k):
            Jeu[i]=Jeu[i+1]
    Jeu[k]=cartedessus
    return Jeu

def T():
    Jeu=Init()
    n=0
    while Jeu[0]!=31:
        Jeu=insertion(Jeu)
        n=n+1
    return n

# programme principal
s=0
for i in range(100):
    n=T()
    s=s+n
m=s/100
print(' moyenne :',m)
```

La fonction T mélange le jeu de cartes par insertions successives jusqu'à ce que la dernière carte se trouve en première position, et compte le nombre d'insertions nécessaires. Donc il s'agit de T_{N-1}.