ECG2 : Concours Blanc n°2

Epreuve de mathématiques n°2

Vendredi 28 Février 2025

Exercice 1 – HEC 2012

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau ker(f) et l'image im(f) de l'endomorphisme f.
La matrice M est-elle inversible?

2. (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.
(b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.
(c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable?

3. À l'aide des résultats de la question 2.(c), indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

4. On pose : $p = \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id})$.
(a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.
(c) Déterminer les deux suites réelles telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait :
$M^n = a_n I + b_n M$.
(d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Exercice 2 – HEC/ESSEC 2022

Soit T une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P).

On suppose que T est une variable aléatoire à densité, à valeurs strictement positives, dont une densité f_T est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

F_T désigne la fonction de répartition de T.

1. On suppose dans cette question que f_T est continue sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, $P([T > t]) > 0$.

b) On pose alors pour tout $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $K_{T,t}(h) = \frac{1}{h} P_{[T>t]}([T \leq t + h])$.

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\lim\limits_{h \to 0^+} K_{T,t}(h)$ existe et vaut $\frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$.

On note alors $\gamma_T(t)$ le quotient $\frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$.

c) Établir que pour tout $t \geq 0$,

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(- \int_0^t \gamma_T(x)dx\right) \qquad (1)$$

Établir aussi que pour tout $t \geq 0$ et $\theta \geq t$, $P_{[T>t]}([T \leq \theta]) = 1 - \exp\left(- \int_t^\theta \gamma_T(x)dx\right)$

On suppose dans la suite que la fonction de répartition de T sur $\mathbb{R}^+$ est définie par la formule (1) où la fonction γ_T, appelée "intensité de défaut", est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points, à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \gamma_T(x)dx$ est-elle convergente ? Justifier que pour tout $t > 0$, $F_T(t) \in]0, 1[$.

3. On suppose dans cette question que γ_T est constante de valeur λ, λ un réel strictement positif. Quelle est la loi de T ?

4. On suppose dans cette question que pour tout $t \geq 0$, $\gamma_T(t) = \lambda t$, λ un réel strictement positif. Déterminer F_T et une densité de T.

Problème : ESSEC II 2011

Une question que se pose un joueur de cartes est de savoir combien de fois il est nécessaire de battre les cartes pour que le paquet soit convenablement mélangé. Ce problème décrit un procédé très élémentaire pour mélanger les cartes et propose de répondre alors à cette question.
Considérons un jeu de N cartes numérotées de C_1 à C_N et disposées en un paquet sur une table. Un joueur bat les cartes et repose le paquet sur la table. Le résultat du mélange est une permutation de ces N cartes.

Notations et Rappel : on note $\mathcal{S}_N$ l'ensemble des permutations possibles pour ce paquet de N cartes et on rappelle que card($\mathcal{S}_N$) = N!
On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $\Omega = \mathcal{S}_N$, $\mathcal{A} = P(\mathcal{S}_N)$ l'ensemble des parties de $\mathcal{S}_N$ et P l'équiprobabilité sur Ω. Pour toute variable aléatoire X on notera E(X) et V(X) l'espérance et la variance de X lorsqu'elles existent.

On considère qu'un paquet est convenablement mélangé lorsque toutes les permutations sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_N$ la probabilité que le tas de cartes se trouve dans la configuration σ vaut 1/N!

Vocabulaire et notations :
Une carte située au sommet de la pile est dite *en position n°1*, celle qui se trouve immédiatement en dessous est dite *en position n°2*, etc. Ainsi une carte située en position n°N désigne la carte située en bas de la pile. On prendra garde à bien distinguer la position d'une carte dans le paquet du numéro qu'elle porte.

Partons d'un tas de cartes rangées initialement dans l'ordre suivant :
pour tout i élément de [[1;N]], la carte C_i se trouve en position i.
Ainsi, à l'instant initial, la carte C_1 se trouve sur le dessus du paquet alors que C_N se trouve donc tout en dessous du paquet.

Pour k élément de [[1;N]], on appelle *insertion à la k-ième place* l'opération qui consiste à prendre la carte située au-dessus du paquet et à l'insérer entre la k-ième et la (k+ 1)-ième place. Une insertion à la première place ne change pas l'ordre des cartes. Une insertion à la N-ième place consiste à faire glisser la carte située au-dessus du paquet pour la mettre sous le paquet.
Le *battage par insertions* du jeu de cartes consiste à effectuer une suite d'insertions aléatoires, en choisissant, à chaque instant, au hasard uniformément dans {1, …, N} la place à laquelle l'insertion a lieu, indépendamment des insertions précédentes. Les instants successifs d'insertions seront notées 1,2, ... n, ... , l'instant initial est n = 0.

Notations. Nous notons :
_ T_1 le premier instant où la carte située sur le dessus du paquet est glissée en dernière position, c'est-à-dire le premier instant où la carte C_N se trouve remontée de la position N à la position N – 1,
_ T_2 le premier instant où la carte C_N se trouve remontée en position N – 2,
_ et plus généralement, pour i dans [[1, N – 1]], T_i le premier instant où la carte C_N atteint la position N – i.
_ On posera également $\Delta_1 = T_1$ et $\forall\ i \in [[2, N-1]]$, $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$
_ Enfin, on notera $T = T_{N-1} + 1$.

On admet que les conditions de l'expérience permettent de faire l'hypothèse que les variables aléatoires $(\Delta_i)_{i \in [[1,N-1]]}$ sont <u>indépendantes</u>.

Description d'un exemple. Dans le tableau ci-dessous, nous décrivons les résultats d'une expérience faite sur un paquet de N = 4 cartes. La première ligne du tableau indique les instants n, la deuxième ligne indique les positions d'insertions, et dans la dernière ligne figure la configuration du paquet à l'instant n.

	instant n	0	1	2	3	4	5	6	7
	insertion en place k		3	2	4	1	3	4	2
Configuration du paquet	position 1	C_1	C_2	C_3	C_2	C_2	C_1	C_4	C_2
	position 2	C_2	C_3	C_2	C_1	C_1	C_4	C_2	C_4
	position 3	C_3	C_1	C_1	C_4	C_4	C_2	C_3	C_3
	position 4	C_4	C_4	C_4	C_3	C_3	C_3	C_1	C_1

Pour cette expérience, on a les résultats $T_1(\omega) = 3$, $T_2(\omega) = 5$ et $T_3(\omega) = 6$ et $T(\omega) = 7$.

Partie 1 - Description et premiers résultats

1. Justifier que $\forall\ i \in [[2, N-1]]\ T_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_i$.
Que représente le l'intervalle de temps Δ_i ?

2) Loi de Δ_1.
Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(\Delta_1 > n)$ et reconnaitre la loi de Δ_1.

3) Soit $i \in [[2, N-1]]$. Loi de Δ_i

(a) Etablir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $P(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$. En déduire que Δ_i suit une loi usuelle que l'on précisera.

b) En déduire $E(\Delta_i) = \frac{N}{i}$ et $V(\Delta_i) = N\frac{N-i}{i^2}$.

4) Loi de T_2. Soit $n \geq 2$.

(a) Démontrer que $P(T_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(\Delta_2 = n-k)P(\Delta_1 = k)$

(b) Justifier que $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k = N\left(1-\frac{1}{N}\right)\left[\left(\frac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right]$

(c) En déduire que l'on a : $P(T_2 = n) = \frac{2}{N}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right]$

5) A l'instant T_2, la carte C_N est située en position $N-2$ et deux cartes se trouvent sous elle qui ont été insérées aux instants T_1 et T_2.
Que valent alors les probabilités qu'à l'instant T_2 :
(a) la carte insérée à l'instant T_1 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_2 en place N ?
(b) la carte insérée à l'instant T_2 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_1 en place N ?

6) A l'instant T_3, la carte C_N est située en position $N-3$ et trois cartes, insérées aux instants T_1, T_2 et T_3 se trouvent sous elle. On note alors pour $i \in \{1, 2, 3\}$, a_i la position de la carte ayant été insérée à l'instant T_i.
(a) Combien y a-t-il de résultats possibles pour le triplet (a_1, a_2, a_3) ?
(b) Quelques exemples : Donner les probabilités qu'à l'instant T_3 :
    i) on obtienne $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N-1, N)$?
    ii) on obtienne $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N, N-1)$?

7) Justifier la phrase suivante : "A partir de l'instant T, toutes les configurations du jeu de cartes sont équiprobables".

On retiendra que si on arrête le battage des cartes par insertion exactement à l'instant T, on a un paquet convenablement mélangé. Cependant le temps T étant aléatoire, il n'est pas possible d'arrêter de battre les cartes à cet instant précis, à moins de marquer la carte C_N bien sûr !

Partie 2 - Estimation du nombre d'insertions pour bien mélanger les cartes

Notations : on introduit les suites $(H_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$\forall\ n \geq 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

<u>8) Espérance et variance de T</u>

Justifier que $E(T) = NH_N$ et que $V(T) = N^2 \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \right) - NH_N$

<u>9) Etude de la suite (u_n)</u>

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

(b) En déduire successivement :
i. la décroissance de la suite (u_n),
ii. l'encadrement : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
(c) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et que sa limite, notée γ appartient à $[0;1]$.
10. (a) Etablir que $E(T) \sim_{N \to +\infty} N.\ln(N)$ et $E(T) = N.\ln(N) + N\gamma + o(N)$.
(b) Quelle est la nature de la suite $\left(\dfrac{V(T)}{N^2}\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$? *(on prendra garde au fait que V(T) dépend de N).*
Justifier qu'il existe une constante α, strictement positive, telle que $V(T) \sim_{N \to +\infty} \alpha N^2$ et $V(T) \leq \alpha N^2$.

<u>11. Ecart à la moyenne</u>

On admet l'inégalité de Bienaymé-Chebychev valable pour une variable aléatoire X admettant une espérance et une variance : $\forall\ \varepsilon > 0$, $P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Soit N fixé et une constante c strictement plus grande que 1.

a) Justifier que $\forall\ \omega \in \Omega$, $\left|T(\omega) - N\ln(N)\right| \leq \left|T(\omega) - E(T)\right| + N$

Comparer par une inclusion les événements suivants

$$\left(\left|T - N\ln(N)\right| \geq cN\right) \quad \text{et} \quad \left(\left|T - E(T)\right| \geq N(c-1)\right)$$

b) Démontrer que $P\left(\left|T - N.\ln(N)\right| \geq cN\right) \leq \dfrac{\alpha}{(c-1)^2}$.

où α a été définie à la question 10b.

Le nombre N étant fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{c \to +\infty} P\left(\left|T - N.\ln(N)\right| \geq cN\right)$?

12) Démontrer aussi que pour tout $\varepsilon > 0$: $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} P\left(\left|T - N.\ln(N)\right| \geq \varepsilon N.\ln(N)\right) = 0$.

On peut traduire ces résultats en disant que l'événement : "T s'écarte de N.ln(N) de manière significative" est un événement asymptotiquement rare.
Pour information, pour un paquet de 32 cartes, on donne $32.\ln(32) \approx 110$ et pour un paquet de 52 cartes, $52.\ln(52) \approx 205$.

13. Simulation informatique.

Dans cette question on considère un jeu de N = 32 cartes.

MODELISATION :

Attention, en Python, on numérotera les cartes et les places de 0 à 31, plutôt que de 1 à 32.

Le paquet de 32 cartes est représenté par une variable `Jeu` qui est un vecteur à 32 coordonnées, rempli initialement d'entiers entre 0 et 31; donc, initialement, `Jeu[i]` contient i, c'est-à-dire que la carte C_i est en position i. Au cours des insertions, `Jeu[i]` désigne le numéro de la carte en position numéro i. Par exemple, `Jeu[i] =10` signifie que la carte C_{10} est en position i.

On indique à la fin de cette question un extrait de programme à compléter en suivant les questions suivantes :

(a) Ecrire la fonction `Init` permettant de définir une variable `Jeu` correspondant à la configuration initiale du paquet de cartes.

(b) Compléter la fonction `Insertion` qui simule une opération d'insertion.

On rappelle qu'après l'instruction `import numpy.random as rd`, la fonction `rd.randint(n1,n2)` simule une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{n_1;\dots;n_2-1\}$.

(c) Que fait la fonction `T` ?

(d) Ecrire le programme principal permettant de calculer et d'afficher la moyenne des valeurs prises par la fonction `T` sur 100 expériences.

Extrait du programme

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def Init():
   ...

def insertion(Jeu):
   k=...          #position où on va insérer la carte du dessus
   cartedessus=Jeu[0]
   if k>0:
      for i in range(k):
           Jeu[i]=...
   Jeu[k]=cartedessus
   return Jeu

def T():
   Jeu=Init()
   n=0
   while Jeu[0]!=31:
      Jeu=insertion(Jeu)
      n=n+1
   return n

# programme principal
...
```