Chapitre 1 – Comparaisons – Correction exercices niveau 2

Exercice 1

a) $\forall n \geq 1$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$ donc $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

De même $2\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Ou : posons $f(x) = 2\sqrt{x}$. f est dérivable sur $[n;n+1]$ et $\forall\, x \in [n;\, n+1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall\, x \in [n,\, n+1]$, $n \leq x \leq n+1 \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{n+1} \quad \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}(n+1-n) \leq f(n+1) - f(n) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}(n+1-n)$

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Soit $n \geq 1$. $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$

(Sommes télescopiques) $\sqrt{n+1} - 1 \leq \dfrac{S_n}{2} \leq \sqrt{n} \quad 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq S_n \quad (*)$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) = +\infty$ donc par comparaison, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

c) D'après (*) : $2\sqrt{n} - 2 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n$. Donc $-2 \leq u_n$.

De plus $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$

Donc (u_n) est décroissante et minorée par -2 donc elle converge vers un réel L.

d) $S_n = 2\sqrt{n} + u_n$ or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ donc $u_n =_{+\infty} o(2\sqrt{n})$.

Donc $S_n \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}$.

Exercice 2 $\forall n \geq k$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

$n - 1 \sim_{+\infty} n, \dots, n-k+1 \sim_{+\infty} n$ (k est fixé). Donc $\dbinom{n}{k} \sim_{+\infty} \dfrac{n \times \dots \times n}{k!} = \dfrac{n^k}{k!}$.

Exercice 3 1) $\forall\, k \in \{0, \dots, n-2\}$, $k! \leq (n-2)!$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} k! \leq \sum_{k=0}^{n-2} (n-2)! \qquad \sum_{k=0}^{n-2} k! \leq (n-1)(n-2)! \qquad \sum_{k=0}^{n-2} k! \leq (n-1)!$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! - n! = \sum_{k=0}^{n-1} k! = \sum_{k=0}^{n-2} k! + (n-1)! \qquad 0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} k! \leq (n-1)!$ donc $\displaystyle(n-1)! \leq \sum_{k=0}^{n} k! - n! \leq 2(n-1)!$

Donc $\dfrac{(n-1)!}{n!} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} - 1 \leq \dfrac{2(n-1)!}{n!}$ $\quad \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} - 1 \leq \dfrac{2}{n}$.

Par théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} - 1 = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} k!}{n!} = 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \sim n!$

Exercice 4 $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} \sim_{+\infty} \dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}} \sim_{+\infty} \dfrac{2^{2n}n^{2n}2\sqrt{\pi n}\, e^{2n}}{e^{2n}n^{2n} \times 2\pi n} \sim_{+\infty} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$