

Chapitre 1 : Comparaison de suites, de fonctions

1. Comparaison de suites

1.1 Suites équivalentes / Suite négligeable

Rappels : **Croissances comparées**

Si $\alpha > 0, \beta > 0, q > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^\beta} = +\infty$$

Introduction :

Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, u_n = n - \ln(n)$.

Si on cherche la limite de (u_n) , on remarque qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

En écrivant : $u_n = n \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)$ et en utilisant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissance comparée),

on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

En quelque sorte "n" l'emporte sur "ln(n)".

Nous allons définir mathématiquement cette notion.

Définitions :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

– Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, on dit que **(u_n) et (v_n) sont équivalentes**.

On note alors : **$u_n \sim_{+\infty} v_n$** .

– si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on dit que **(u_n) est négligeable devant (v_n)** (ou que (v_n) est prépondérante devant (u_n)).

On note alors : **$u_n =_{+\infty} o(v_n)$** . (" u_n est un petit o de v_n ")

Exemples :

– $u_n = -2n + 3, v_n = n^2$

– $u_n = n^2 - n, v_n = n^2$

Remarque : Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) 3 suites.

– si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n \sim_{+\infty} w_n$ alors $u_n \sim_{+\infty} w_n$

– si $u_n =_{+\infty} o(v_n)$ et $v_n =_{+\infty} o(w_n)$ alors $u_n =_{+\infty} o(w_n)$

– si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n =_{+\infty} o(w_n)$ alors $u_n =_{+\infty} o(w_n)$

1.2 Limites et comparaisons

Propriété :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

- 1) si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L \neq 0 \end{cases}$ alors $u_n = o(v_n)$
- 2) si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \infty \end{cases}$ alors $u_n = o(v_n)$
- 3) si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L \\ L \in \mathbb{R} \text{ et } \neq 0 \end{cases}$ alors $u_n \sim v_n$

Démonstration : évidente d'après les opérations sur les limites

Ex : Comparaison de $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = 1$ et $w_n = n$ **Attention, deux suites qui tendent vers 0 ne sont pas forcément équivalentes :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \text{donc } \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{n^2} \text{ ne sont pas équivalentes !}$$

Propriété fondamentale :

Soient u et v deux suites.Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ (fini ou infini), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.**Pour déterminer la limite d'une suite, on peut donc chercher un équivalent plus simple.**Exemple : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$

1.3 Exemples classiques

Propriété : **Croissances comparées**

Soit α, β, a et b des réels strictement positifs.

1) si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$

2) $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$.

3) $\forall a > 1$, $n^\alpha = o(e^{\beta n})$, $n^\alpha = o(a^n)$

4) si $a < b$, $a^n = o(b^n)$

(On peut retenir : « une exponentielle (ou une puissance) l'emporte sur n^α , qui l'emporte sur un logarithme »)

Exemples :

$\ln(n) = o(\sqrt{n})$, $\sqrt{n} = o(n)$, $n = o(n^2)$, $n^2 = o(2^n)$, $2^n = o(e^n)$, ...

Propriété :

Un **polynôme** en n est équivalent à son **monôme non nul de plus haut degré**.

Exemple :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 + 3n + 5$?

Attention : Les expressions contenant a^n , $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, e^n , $n!$... ne sont pas des polynômes en n !

Propriété :

Soit (u_n) une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors :

$$\ln(1 + u_n) \sim_{+\infty} u_n \quad e^{u_n} - 1 \sim_{+\infty} u_n$$

Démonstration : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$ donc $\ln(1+u_n) \sim_{+\infty} u_n$.

De même pour $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exemple : Equivalent simple de $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$?

Remarque : Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Alors en écrivant $\ln(u_n) = \ln(1 + (u_n - 1))$, on se ramène au cas ci-dessus.

Ex : Equivalent simple de $\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-3}\right)$?

1.4 Opérations sur les équivalents

Remarque : Soit (u_n) et (v_n) deux suites et λ un réel non nul.

- _ Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n =_{+\infty} o(v_n)$ et $u_n =_{+\infty} o(\lambda v_n)$
- _ Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $\lambda u_n \sim_{+\infty} \lambda v_n$.

Propriété fondamentale : **Equivalent d'une somme**

Soit u, v, w sont trois suites.

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n \\ w_n =_{+\infty} o(v_n) \end{cases}$ alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$

"Une somme est équivalente à son terme prépondérant"

Remarque :

Autrement dit, si $u_n =_{+\infty} v_n + o(v_n)$, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$

Exemple : Equivalent de $3n - 2\ln(n)$?

Remarque : Attention, cette propriété est fausse pour un produit !

Par exemple : $n \cdot \ln(n)$ n'est pas équivalent à n !

Propriété : **Equivalents et produits, quotients, puissances**

Soient u, v, w, z des suites et α un réel.

- _ Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $u_n w_n \sim_{+\infty} v_n w_n$
- _ Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $u_n^\alpha \sim_{+\infty} v_n^\alpha$
- _ Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $w_n \sim_{+\infty} z_n$ alors $\begin{cases} u_n w_n \sim_{+\infty} v_n z_n \\ \text{si } w_n \text{ et } z_n \text{ ne s'annulent pas } \frac{u_n}{w_n} \sim_{+\infty} \frac{v_n}{z_n} \end{cases}$

Remarque : Attention, ne pas utiliser des règles qui n'existent pas !

$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow u_n + w_n \sim_{+\infty} v_n + w_n$: Non

$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim_{+\infty} \ln(v_n)$: Non

$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow e^{u_n} \sim_{+\infty} e^{v_n}$: Non

Exemple :

Equivalent puis limite de $u_n = \frac{(n^2 + 2n - 3)(e^{1/n} - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}}$:

1.5 Encadrements et équivalents

A l'aide d'un encadrement du type $u_n \leq v_n \leq w_n$, on peut souvent trouver un équivalent de v_n , en faisant apparaître un quotient qui tend vers 1 :

Méthode :

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $u_n > 0$, l'encadrement devient : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq \frac{w_n}{u_n}$.

Si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{u_n} = 1$, alors par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. Donc $v_n \sim_{+\infty} u_n$.

Ex : Soit (v_n) une suite telle que $\forall n \geq 1, n \leq v_n \leq n + \frac{1}{n}$. Déterminer un équivalent simple de (v_n)

1.6 Cas particulier de $u_n^{v_n}$ **Rappel :**

$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln(a)}$

Pour étudier une expression du type a^b (limite, dérivée, ...), il est généralement nécessaire de passer à cette forme.

Ex : Limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

2. Comparaisons de fonctions

Dans toute cette partie, x_0 désigne un réel ou $+\infty$, ou $-\infty$.

2.1 Fonction négligeable / Fonctions équivalentes

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies et non nulles sur un voisinage de x_0 :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on dit que f est équivalente à g en x_0 . Dans ce cas, on note $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.
- si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante devant f) au voisinage de x_0 . Dans ce cas, on note $f(x) =_{x_0} o(g(x))$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 .

Si $f(x) =_{x_0} g(x) + o(g(x))$ alors $f(x) \sim_{x_0} g(x)$

Comme pour les suites, la relation d'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et la puissance, mais pas avec la somme et la différence.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 .

Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ (**fini ou infini**), alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

2.2 Exemples usuels

Propriété :

$$\ln(1+x) \sim_0 x \quad e^x - 1 \sim_0 x$$

Corollaire

Soit u une fonction définie sur un voisinage de x_0 .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ alors $e^{u(x)} - 1 \sim_{x_0} u(x)$ et $\ln(1+u(x)) \sim_{x_0} u(x)$.

Exemple : Limite en 0 de $\frac{\ln(1-x^2)}{2x^2}$?

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme est équivalent à son monôme non nul de plus haut degré.
En 0, un polynôme est équivalent à son monôme non nul de plus bas degré.

Exemples :

_ Limite en $-\infty$ de $\frac{2-x^3}{x^2+x+1}$?

_ Equivalent en 0 de $x^3 + 3x^2 - 4x$?

Propriété (**Croissances comparées**) :

Soient α et β des réels strictement positifs

1) si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha =_{+\infty} o(x^\beta)$

2) $x =_{+\infty} o(e^x)$ $\ln(x) =_{+\infty} o(x)$

3) De manière générale, $x^\alpha =_{+\infty} o(e^{\beta x})$ $\ln^\alpha(x) =_{+\infty} o(x^\beta)$

Exemple :

Limite en $+\infty$ de $f(x) = x - 2\ln^3(x)$?