Chapitre 1 : Comparaisons – Exercices niveau 2

Exercice 1

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Justifier que $\forall\, n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) En déduire que $\forall\, n \geq 1$, $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq S_n$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

d) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

e) En déduire que $S_n \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}$.

Exercice 2

1) Pour $n \geq 3$, on pose $u_n = \binom{n}{3}$. Montrer que $u_n \sim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{6}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \geq k$, on pose $v_n = \binom{n}{k}$. Déterminer un équivalent simple de v_n.

Exercice 3

1) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-2} k! \leq (n-1)!$

2) En déduire que $\forall\, n \geq 2$, $(n-1)! \leq \sum_{k=0}^{n} k! - n! \leq 2(n-1)!$

3) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k! \sim_{+\infty} n!$

Exercice 4

On admet la formule suivante, appelée formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Montrer que $\binom{2n}{n} \sim_{+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.