Chapitre 1 : Comparaison de suites, de fonctions – Feuille n°1

Exercice 1

On considère les suites de termes généraux : 1, n, n^2, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\sqrt{n}$, ln(n), e^n, e^{-n}.

1) Déterminer la limite de chacune de ces suites.
2) Montrer que $\sqrt{n} =_{+\infty} o(n)$
3) Classer toutes ces suites de la plus négligeable à la plus prépondérante.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n.u_n = \ln(3)$. Déterminer un équivalent simple de (u_n).

Exercice 3 Déterminer un équivalent simple de :

1) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{n - n^2}$ 2) $u_n = \exp\left(\dfrac{3}{n^2}\right) - 1$ 3) $\ln(1 + e^{-n})$

Exercice 4 Déterminer un équivalent simple, puis la limite de :

1) $\dfrac{\sqrt{n^2 - 3n + 2}}{n - e}$ 2) $(n^2 - 1) \times \ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)$ 3) $\dfrac{(\sqrt{n} - 4)^6}{2n^3}$ 4) $\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

Exercice 5

Déterminer un équivalent, puis calculer les limites des expressions suivantes :

1) $u_n = 2^n - n + 1$ 2) $u_n = \dfrac{3^{n-1} + 2n}{5^{n+4} - 6n - 7}$ 3) $u_n = 2^n - 4^n$

4) $u_n = n^{2024} - 1{,}2024^n$ 5) $u_n = \ln^2(n) - \sqrt{n}$ 6) $u_n = -3\ln(n) + e^n + 5n^4 - 1$

Exercice 6

1) Soit (u_n) une suite telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n \leq u_n \leq n^2$.
Déterminer un équivalent simple de (u_n).
2) Soit (v_n) une suite telle que : $\forall n \geq 1$, $v_n \leq n \leq v_n + \ln(n)$.
Déterminer un encadrement de (v_n), et en déduire un équivalent simple de (v_n).

Exercice 7 Déterminer la limite de $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

Exercice 8

Rappel : $\forall\, \alpha > 0,\ \forall\, \beta > 0,\ \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^{\beta x} = 0$

On considère les 9 expressions suivantes : 1, x, x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, e^x, e^{-x}, ln(x)

1) Rappeler le classement de ces expressions de la plus négligeable à la plus prépondérante en $+\infty$.
2) Déterminer le classement de ces expressions au voisinage de $-\infty$ (pour celles qui sont définies au voisinage de $-\infty$).
3) Déterminer le classement de ces expressions au voisinage de 0^+.