Stage ECG2
Chapitre 1 : Les bases

1. Egalités

1.1 Généralités

Pour montrer une égalité du type "A = B", on peut partir de A et trouver B, partir de B et trouver A, ou partir des deux séparément et trouver la même expression.

Factoriser, c'est *transformer une somme en produit (ou quotient)*
Développer, c'est *transformer un produit (ou quotient) en somme*

Egalités remarquables : $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1.2 Quotient, racines, puissances

Soient a, b, c, d des réels, tels que les dénominateurs ne s'annulent pas :

$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $\quad$ $\frac{a}{b + c} = X$ $\quad$ $\frac{a \times b}{c} = a \times \frac{b}{c}$ $\quad$ $\frac{a}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$

$\frac{a + c}{b + c} = X$ $\quad$ $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ $\quad$ $\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$

$\frac{1/a}{b} = \frac{1}{ab}$ $\quad$ $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Soient a, b des réels positifs ou nuls (sauf au dénominateur)

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\quad$ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = X$ $\quad$ $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\quad$ $(\sqrt{a})^2 = a$

Si $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$

Puissances :
Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. $\quad a^b = e^{b.ln(a)}$

Soit a, b, c, d des réels.

$a^c \times a^d = a^{c+d}$ $\quad$ $\frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}$ $\quad$ $\frac{1}{a^d} = \left(\frac{1}{a}\right)^d$ $\quad$ $(a^c)^d = a^{cd}$

$a^c + b^c = X$ $\quad$ $a^c \times b^c = (ab)^c$ $\quad$ $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

1.3 ln et exp

$\ln(0) = X$ $\quad \ln(1) = 0$ $\quad \ln(e) = 1$ $\quad e^0 = 1$ $\quad e^1 = e$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$e^a \times e^b = e^{a+b}$ $\quad e^a + e^b = X$ $\quad (e^a)^b = e^{ab}$ $\quad \dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$ $\quad \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2$,

$\ln(a) \times \ln(b) = X$ $\quad \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ $\quad \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ $\quad \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ $\quad \ln(e^a) = a$ $\quad \ln(a^b) = b.\ln(a)$

1.4 Factorielle

$\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \ldots \times n \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i \end{cases}$ En particulier : $0! = 1$

Relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n + 1)! = n! \times (n + 1)$

1.5 Les polynômes

Rappel : Un polynôme est une expression algébrique du type

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme.
L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{R}[X]$.
L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété ("Identification des coefficients") :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
En particulier, un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Exemple : Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^3 + 3X - 4 = (X - 1)P(X)$.

Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$ alors
$(X - 1)P(X) = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c$
$= aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$
Par identification des coefficients,

$$(X - 1)P(X) = X^3 + 3X - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ 3 = 3 \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{donc } X^3 + 3X - 4 = (X - 1)(X^2 + X + 4)$$

Factorisation d'un polynôme :
Soit P un polynôme et a un réel. **Si a est une racine de P, alors on peut factoriser P par (x – a).**

Remarque : En particulier, pour un polynôme de degré 2, si on trouve une racine évidente (0, 1, -1, 2, -2), on peut factoriser le polynôme "à vue".
Exemple : Factoriser $2X^2 + 3X - 5$ $\quad$ *$2 \times 1^2 + 3 \times 1 - 5 = 0$ donc 1 est une racine évidente.*
Donc on peut factoriser par $X - 1$. Donc par identification visuelle, $2X^2 + 3X - 5 = (X - 1)(2X + 5)$

1.6 Les sommes

Soit (u_k) et (v_k) deux suites, λ un réel et p et n deux entiers naturels.

Formules de linéarité :

$$\sum_{k=p}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k \quad \text{mais } \sum_{k=p}^{n} (u_k v_k) \neq \left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=p}^{n} v_k\right) !$$

$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right)$$

Somme d'une constante : $\sum_{k=p}^{n} \lambda = \lambda\,(n - p + 1)$ (= constante × nbre de termes)

Sommes à connaitre :

$$\sum_{k=0 \text{ (ou 1)}}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0 \text{ (ou 1)}}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ (q \neq 1) \qquad \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

Travail sur les indices :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - (u_0 + \ldots + u_{p-1})$$

En posant $k' = k - p$: $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k'=0}^{n-p} u_{k'+p}$

Remarque :

Pensez aux sommes télescopiques $\left(\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k)\right)$

Sommes doubles :

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double.

Sommes doubles rectangulaires : $\sum_{(i,j) \in \{1..n\}\times\{1..p\}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)$

Sommes doubles triangulaires : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)$

2. Inégalités

2.1 Généralités

Inégalités et signe

Remarque : $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$.

Pour montrer une inégalité, on peut faire la différence entre les deux termes et étudier son signe.
(il faut parfois étudier la fonction).

Signe d'une somme, d'un produit, d'un quotient :

a	b	a + b	a × b	a/b (b ≠ 0)
+	+	+	+	+
+	–	*?*	–	–
–	+	*?*	–	–
–	–	–	+	+

Pour étudier le signe d'une expression, il faut donc la factoriser !

Inégalités et opérations :

Soient a, b, c et des nombres réels.

_ si $a < b$ alors $a + c < b + c$ (on peut **ajouter un terme (positif ou négatif)** dans une inégalité

_ si $a < b$: $\begin{cases} \text{si } c > 0 \text{ alors } ac < bc \text{ et } \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \\ \text{si } c < 0 \text{ alors } ac > bc \text{ et } \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$

(si on **multiplie** (ou si on **divise**) par un **nombre positif**, on garde le sens de l'inégalité, si on **multiplie** (ou **divise**) par un **nombre négatif**, on change le sens de l'inégalité)

_ si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$ (on peut **additionner deux inégalités**, mais pas les soustraire !)

_ si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $ac < bd$ (on peut **multiplier deux inégalités** seulement si tous les membres sont **positifs**, on ne peut pas diviser deux inégalités).

2.2 Inégalités et fonctions

Rappel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est **croissante** sur I si $\forall a \in I, \forall b \in I$, $\boldsymbol{a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)}$ (on garde le sens)

On dit que f est **décroissante** sur I si $\forall a \in I, \forall b \in I$, $\boldsymbol{a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)}$ (on change le sens)

On peut en particulier l'utiliser avec les fonctions :

_ exp (croissante sur $\mathbb{R}$)

_ ln (croissante sur $]0; +\infty[$)

_ carré (décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$)

_ inverse (décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$)

_ racine carré (croissante sur $[0; +\infty[$)

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{1}{\ln(e^x + 1)} \geq 2$. (remarque : $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$ $e^x + 1 > 1$ donc $\ln(e^x + 1) > 0$)

$$\frac{1}{\ln(e^x + 1)} \geq 2 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) \leq \frac{1}{2} \quad \textit{(fonction inverse décroissante sur }]0;+\infty[\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow e^x + 1 \leq e^{1/2} \quad \textit{(fonction exp croissante)}$$

$$\Leftrightarrow e^x \leq \sqrt{e} - 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \ln\left(\sqrt{e} - 1\right) \quad \textit{(fonction ln croissante)}$$

Remarque :

Pour montrer une inégalité du type : si x ≥ a, alors f(x) ≥ f(a) :

_ si x n'apparait **qu'une seule fois dans l'expression de f**, les règles sur les inégalités suffisent en général.

_ si x apparait **plusieurs fois dans l'expression de f**, il faut très souvent étudier les variations de f.

Exemples :

_ Montrer que $\forall$ x ≥ 1, $\dfrac{2}{\ln(x) + 1} \leq 2$.

$x \geq 1$ donc $\ln(x) \geq 0$ $\quad \ln(x) + 1 \geq 1$ $\quad \dfrac{1}{\ln(x) + 1} \geq 1$ $\quad \dfrac{2}{\ln(x) + 1} \leq 2$

_ Montrer que $\forall$ x ≥ 0, $\dfrac{2x - 1}{3x + 2} \geq -\dfrac{1}{2}$.

Posons $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$ sur $[0; +\infty[$. f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \geq 0$ $\quad f'(x) = \dfrac{2(3x + 2) - (2x - 1)3}{(3x + 2)^2}$

$= \dfrac{7}{(3x + 2)^2} \leq 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc si $x \geq 0$ $\quad f(x) \geq f(0)$ $\quad \dfrac{2x - 1}{3x + 2} \geq -\dfrac{1}{2}$.