Chapitre 1 – Les bases – Feuille n°1

Exercice 1

Soit p et n des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Montrer que $n.\binom{n-1}{p-1} = p.\binom{n}{p}$.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes, quand elles existent :

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ b) $\ln(\sqrt{2}\, e^{-x})$ c) $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(\sqrt{x}) + \ln(x)}$ d) $\dfrac{x^{2n+1}}{(2x)^{n-1}}$

e) $\dfrac{3^{2n} \times 4^{n-2}}{2^{3n+1} \times 6^{n-1}}$ (sous la forme $\alpha.\beta^n$) f) $\dfrac{(-1)^n + 1}{3^n} - \dfrac{(-1)^{n+1} + 1}{3^{n+1}}$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier les expressions $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 4

Factoriser très rapidement, puis déterminer les racines de :

a) $2x^2 - 3x$ b) $x^2 - 2$ c) $x^2 + 4x + 3$

d) $(2x + 1)^2 - 4$ e) $-x^2 + 7x - 10$ f) $x^2 - 2x + 1$

g) $1 - x^2$ h) $3x^2 + 2x - 5$

Exercice 5

1) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : $X^3 - 5X + 2 = (X - 2)P(X)$.

2) Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\dfrac{-3x^2 + x + 5}{x + 1} = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$.

3) Déterminer l’ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que : $2P(X) - (X + 1)P'(X) = 0$.

4) Même question avec : $P(X + 1) - P(X) = X$

Exercice 6

Soit $n \geq 3$. Déterminer

1) $S_n = \sum_{i=1}^{n} 3^{2i-1}$ 2) $T_n = \sum_{i=1}^{n} (i + 1)(i + 2)$. 3) $U_n = \sum_{i=3}^{n} (i - 2)^2$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n} ij$. 2) Déterminer $T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \dfrac{i}{j}$.

3) Déterminer $U_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} (j + i) \right)$