Stage ECG2
Chapitre 1 : Les bases

1. Egalités

1.1 Généralités

Pour montrer une égalité du type "A = B", on peut partir de A et trouver B, partir de B et trouver A, ou partir des deux séparément et trouver la même expression.

Factoriser, c'est
Développer, c'est

Egalités remarquables : $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$
$(a + b)^2 =$
$(a - b)^2 =$
$(a - b)(a + b) =$
$(a + b + c)^2 =$
$(a + b)^3 =$

1.2 Quotient, racines, puissances

Soient a, b, c, d des réels, tels que les dénominateurs ne s'annulent pas :

$\frac{a+b}{c} =$ $\qquad \frac{a}{b+c} =$ $\qquad \frac{a \times b}{c} =$ $\qquad \frac{a}{b \times c} =$

$\frac{a+c}{b+c} =$ $\qquad \frac{a \times c}{b \times c} =$ $\qquad \frac{a \times c}{b \times d} =$ $\qquad \frac{1}{a/b} =$

$\frac{1/a}{b} =$ $\qquad \frac{a/b}{c/d} =$

Soient a, b des réels positifs ou nuls (sauf au dénominateur)

$\sqrt{a \times b} =$ $\qquad \sqrt{a} + \sqrt{b} =$ $\qquad \sqrt{\frac{1}{a}} =$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} =$ $\qquad (\sqrt{a})^2$

Si $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} =$

Puissances :
Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. $\quad a^b =$

Soit a, b, c, d des réels. Sous réserve d'existence :

$a^c \times a^d =$ $\qquad \frac{a^c}{a^d} =$ $\qquad \frac{1}{a^d} =$ $\qquad (a^c)^d =$

$a^c + b^c =$ $\qquad a^c \times b^c =$ $\qquad \frac{a^c}{b^c} =$

1.3 ln et exp

$\ln(0) =$ $\qquad$ $\ln(1) =$ $\qquad$ $\ln(e) =$ $\qquad$ $e^0 =$ $\qquad$ $e^1 =$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$e^a \times e^b =$ $\qquad$ $e^a + e^b =$ $\qquad$ $(e^a)^b =$ $\qquad$ $\dfrac{1}{e^a} =$ $\qquad$ $\dfrac{e^a}{e^b} =$

$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2$,

$\ln(a) \times \ln(b) =$ $\qquad$ $\ln(a) + \ln(b) =$ $\qquad$ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) =$ $\qquad$ $\ln(a) - \ln(b) =$

$\ln(\sqrt{a}) =$ $\qquad$ $\ln(e^a) =$ $\qquad$ $\ln(a^b) =$

1.4 Factorielle

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n! =$ $\qquad$ En particulier : $0! =$

Relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n + 1)! =$

1.5 Les polynômes

Rappels : Un polynôme est une expression algébrique du type $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
$a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme.
L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{R}[X]$.
L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété ("Identification des coefficients") :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
En particulier, un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Exemple : Déterminer le polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^3 + 3X - 4 = (X - 1)P(X)$.

Factorisation d'un polynôme :
Soit P un polynôme et a un réel. **Si a est une racine de P, alors on peut factoriser P par (x – a).**

Remarque : En particulier, pour un polynôme de degré 2, si on trouve une racine évidente (0, 1, -1, 2, -2), on peut factoriser le polynôme "à vue".

Exemple : Factoriser $2X^2 + 3X - 5$

1.6 Les sommes

Soit (u_k) et (v_k) deux suites, λ un réel et p et n deux entiers naturels.

Formules de linéarité :

$$\sum_{k=p}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k \quad \text{mais } \sum_{k=p}^{n} (u_k v_k) \neq \left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=p}^{n} v_k\right) !$$

$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right)$$

Somme d'une constante : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \lambda = \lambda\,(n - p + 1)$ (= constante × nbre de termes)

Sommes à connaitre :

$$\sum_{k=0\ (\text{ou } 1)}^{n} k = \qquad\qquad \sum_{k=0\ (\text{ou } 1)}^{n} k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \qquad\qquad \sum_{k=p}^{n} q^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

Travail sur les indices :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - (u_0 + \ldots + u_{p-1})$$

En posant $k' = k - p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k'=0}^{n-p} u_{k'+p}$

Remarque :

Pensez aux sommes télescopiques $\left(\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k)\right)$

Sommes doubles :

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double.

Sommes doubles rectangulaires : $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \{1..n\}\times\{1..p\}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)$

Sommes doubles triangulaires : $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)$

2. Inégalités

2.1 Généralités

Inégalités et signe
Remarque : $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$.
Pour montrer une inégalité, on peut faire la différence entre les deux termes et étudier son signe.
(il faut parfois étudier la fonction).

Signe d'une somme, d'un produit, d'un quotient :

a	b	a + b	a × b	a/b (b ≠ 0)
+	+			
+	–			
–	+			
–	–			

Pour étudier le signe d'une expression, il faut donc

Inégalités et opérations :
Soient a, b, c et des nombres réels.

_ si $a < b$ alors $a + c < b + c$ (on peut **ajouter un terme (positif ou négatif)** dans une inégalité

_ si $a < b$: $\begin{cases} \text{si } c > 0 \text{ alors } ac < bc \text{ et } \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \\ \text{si } c < 0 \text{ alors } ac > bc \text{ et } \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$

(si on **multiplie** (ou si on **divise**) par un **nombre positif**, on garde le sens de l'inégalité, si on **multiplie** (ou **divise**) par un **nombre négatif**, on change le sens de l'inégalité)

_ si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$ (on peut **additionner deux inégalités**, mais pas les soustraire !)

_ si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $ac < bd$ (on peut **multiplier deux inégalités** seulement si tous les membres sont **positifs**, on ne peut pas diviser deux inégalités).

2.2 Inégalités et fonctions

Rappel :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **croissante** sur I si $\forall\, a \in I$, $\forall\, b \in I$, $\mathbf{a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)}$ (on garde le sens)
On dit que f est **décroissante** sur I si $\forall\, a \in I$, $\forall\, b \in I$, $\mathbf{a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)}$ (on change le sens)

On peut en particulier l'utiliser avec les fonctions :
_ exp
_ ln
_ carré
_ inverse
_ racine carré

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{1}{\ln(e^x + 1)} \geq 2$. (remarque : $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad e^x + 1 > 1$ donc $\ln(e^x + 1) > 0$)

Remarque :

Pour montrer une inégalité du type : si $x \geq a$, alors $f(x) \geq f(a)$:

_ si x n'apparait **qu'une seule fois dans l'expression de f**, les règles sur les inégalités suffisent en général.

_ si x apparait **plusieurs fois dans l'expression de f**, il faut très souvent étudier les variations de f.

Exemples :

_ Montrer que $\forall\ x \geq 1$, $\dfrac{2}{\ln(x) + 1} \leq 2$.

_ Montrer que $\forall\ x \geq 0$, $\dfrac{2x - 1}{3x + 2} \geq -\dfrac{1}{2}$.