Chapitre 10 : Couples de variables aléatoires discrètes

1. Loi d'un couple de V.A.R. discrètes

1.1 Loi conjointe / Lois conditionnelles

Définition :

Soient X et Y deux V.A.R.D. telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.
On appelle **loi (ou loi conjointe) du couple (X, Y)** l'ensemble des $P(\mathbf{(X = x_i) \cap (Y = y_j)})$ où $i \in I, j \in J$.

Remarques :

_ On a toujours $\sum_{i \in I, j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 1$.
_ si I et J sont petits, on peut représenter la loi conjointe dans un tableau à double entrée.

Définition :

Pour tout $i \in I$ tel que $P(X = x_i) \neq 0$, on appelle **loi de Y conditionnée par $(X = x_i)$** (ou sachant $X = x_i$), l'ensemble des valeurs $\mathbf{P_{(X = x_i)}(Y = y_j)}$**, où $j \in J$**.

Remarques :
_ pour trouver la loi conditionnelle, il faut se placer dans le cas où $(X = x_i)$
("Si $(X = x_i)$ alors …)
_ la loi conditionnelle peut être une loi usuelle.

Propriété : Lien loi conditionnelle/ loi conjointe

$\forall i \in I, \forall j \in J$, si $P(X = x_i) \neq 0$, $\mathbf{P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P_{(X = x_i)}(Y = y_j)}$

Cette formule provient directement de la formule $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Remarques :
_ Pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) :
  _ soit on exprime l'événement $(X= x_i) \cap (Y = y_j)$ en fonction d'événements élémentaires
  _ soit on utilise la probabilité conditionnelle.
  _ soit on utilise l'indépendance de X et Y (si elles sont indépendantes) : voir paragraphe 1.3
_ Pour déterminer $P((X = i) \cap (Y = j))$ ou $P_{(X = i)}(Y= j)$ il faut **souvent séparer les cas $i < j$, $i =j$, $i > j$**.

Exemples :
1) Une urne contient 3 boules numérotées 1 à 3.
On tire une première boule : s'il s'agit de la boule 1, on la remet, sinon on ne la remet pas. On tire une deuxième boule.
Soit X le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de la seconde.
Déterminer la loi du couple (X, Y)

X\Y	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

$P((X = 1)\cap(Y = 1)$ = P(on tire 1 au 1er tirage et 1 au deuxième tirage) $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$P((X = 2)\cap(Y = 1)) = P(\text{on tire 2 au 1er tirage et 1 au deuxième tirage}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$(X = 2) \cap (Y = 2)$ = impossible

2) Une pièce a une probabilité de faire pile de $\frac{1}{3}$.

On lance cette pièce jusqu'à obtenir un deuxième pile.
Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile.
Soit Y le nombre de lancers nécessaires (en tout) pour obtenir le deuxième pile.
Déterminer la loi du couple (X, Y)

$X(\Omega) = \{1, 2, \dots\}$ $\quad$ $Y(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$

$\forall\, j > i$, $(X = i) \cap (Y = j)$ = "On obtient le premier pile au i-ème tirage et le deuxième au j-ème" = $F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{j-1} \cap F_j$

Donc $P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j - i + 1}\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2}\frac{1}{9}$ (par indépendance)

$\forall\, j \leq i$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$

3) On lance 10 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de piles effectués.
Puis on choisit au hasard un nombre entre 0 et X, qu'on note Y.
a) Quelle est la loi de X ?
b) Pour tout $j \leq i$, déterminer $P_{(X = i)}(Y = j)$
c) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

a) Il y a 10 lancers indépendants. La probabilité de faire pile est 1/2 et X est le nombre de piles effectués.
Donc $X \longrightarrow \mathcal{B}(10, 1/2)$.

Donc $\forall\, i \in \{0, .., 10\}$, $P(X = i) = \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10-i}}\frac{1}{2^i} = \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10}}$

b) Sachant $(X = i)$, Y suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, i\}$. Donc $P_{(X = i)}(Y = j) = \frac{1}{i+1}$ si $j \leq i$

c) Donc $P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)\, P_{(X = i)}(Y = j) = \begin{cases} \binom{10}{i}\frac{1}{2^{10}}\frac{1}{i+1} \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ si } j > i \end{cases}$

1.2 Lois marginales

Définition :

Si (X, Y) est un couple de V.A.R., les lois des V.A.R. X et Y sont appelées **lois marginales**.

Remarques :

_ Chercher les lois marginales, c'est donc chercher $P(X = x_i)$ pour $i \in I$ et $P(Y = y_j)$ pour $j \in J$.

_ quand la loi conjointe est présentée dans un tableau, les lois marginales s'écrivent dans les marges !

Propriété fondamentale : (Formule des probabilités totales)

(Avec le S.C.E. $(X = x_i)_{i \in I}$)

$$\forall j \in J,\ \mathbf{P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i \in I} P(X = x_i) P_{(X = x_i)}(Y = y_j)}.$$

(Avec le S.C.E. $(Y = y_j)_{j \in J}$)

$$\forall i \in I,\ \mathbf{P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j)\, P_{(Y = y_j)}(X = x_i)}.$$

Remarques :

_ Dans la somme, il faut souvent séparer $i < j$, $i=j$, $i > j$.

_ Ces formules permettent de trouver la loi marginale quand on a la loi conjointe ou la loi conditionnelle.

Exemples (suite des exemples précédents) :

1)

X\Y	1	2	3	P(X = i)
1	1/9	1/9	1/9	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	1/6	1/6	0	1/3
P(Y = j)	8/18	5/18	5/18	

2) Loi marginale de X : on voit que $X \longrightarrow \mathcal{G}(1/3)$.

Loi marginale de Y : $Y(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9} & \text{si } j > i\ (\Leftrightarrow i < j) \\ 0 \text{ si } j \le i\ (\Leftrightarrow i \ge j) \end{cases}$$

$$\forall j \ge 2,\ P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} P((X = i) \cap (Y = j))}_{(i < j)} + \underbrace{\sum_{i=j}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))}_{(i \ge j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9} + 0 = (j-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{j-2} \frac{1}{9}$$

1.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition :

Soit (X, Y) un couple de V.A.R.D.
Si **$\forall$ i $\in$ I et $\forall$ j $\in$ J, $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$**, on dit que X et Y sont des **variables aléatoires indépendantes**.

Remarque :
_ autrement dit, X et Y sont indépendantes si et seulement si les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants $\forall i \in I$, $\forall j \in J$.
_ pour montrer que deux variables ne sont pas indépendantes, un contre-exemple suffit. Penser aux valeurs telles que $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 0$.

Exemple :
Dans l'exemple n°1, X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

$P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 3)) = 0$ $\quad$ $P(X_1 = 3)P(X_2 = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{18} \neq 0$.

X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Propriété :

Soit X et Y deux variables aléatoires et soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si X et Y sont indépendantes, alors f(X) et g(Y) sont aussi indépendantes.

2. Covariance

2.1 Sommes doubles / Séries doubles : Rappels et compléments

Propriété : **Somme double rectangulaire**

Soit $(u_{i,j})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p}$ une famille de réels. Alors :

$$\boldsymbol{\sum_{(i,j) \in \{1..n\}\times\{1..p\}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,j}\right)}$$

Exemple :

Soit $n \ge 1$, $p \ge 1$. Déterminer $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \{1..n\}\times\{1..p\}} i\times j$

$$\sum_{(i,j) \in \{1..n\}\times\{1..p\}} i\times j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} i\times j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{p} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\times\frac{p(p+1)}{2}\right) = \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{p(p+1)n(n+1)}{4}$$

Propriété : **Somme double triangulaire**

Soit $(u_{i,j})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n}$ une famille de réels. Alors :

$$\boldsymbol{\sum_{1 \le i \le j \le n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j}\right)}$$

Exemple : Soit $n \ge 1$. Déterminer $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le n} i\times j$

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} i\times j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i\times j = \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j^3+j^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{1}{24}\left[n(n+1)[3n(n+1) + 2(2n+1)]\right] = \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$

Remarque : **Série double**

Soit $(a_{i,j})_{i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}}$ une famille de réels.

Si $\forall j \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{i \ge 0} a_{i,j}$ est absolument convergente, et si la série $\displaystyle\sum_{j \ge 0}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$ est absolument convergente, alors on définit : $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$

On admet que les manipulations classiques sur les sommes sont également licites dans cette situation.

En particulier, on a aussi : $\displaystyle\sum_{i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$

2.2 Théorème de transfert

Théorème :

Soit (X, Y) un couple de V.A.R. discrètes et g une fonction définie de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit Z = g(X, Y). Si $\sum_{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega)} g(x,y)P((X = x) \cap (Y = y))$ existe (est fini ou converge absolument dans le cas d'une série), alors Z admet une espérance et

$$\mathbf{E(Z) = E(g(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega)} g(x,y)P((X = x) \cap (Y = y))}.$$

Remarque : En particulier, si la somme est finie, ou si la série converge absolument,

$$\mathbf{E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega)} x.y.P((X = x) \cap (Y = y)).}$$

Ex : suite du premier exemple. On a :

X\Y	1	2	3	P(X = i)
1	1/9	1/9	1/9	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	1/6	1/6	0	1/3
P(Y = j)	8/18	5/18	5/18	

Déterminer E(XY)

$$E(XY) = 1\times1\times\frac{1}{9} + 1\times2\times\frac{1}{9} + 1\times3\times\frac{1}{9} + 2\times1\times\frac{1}{6} + 2\times2\times0 + 2\times3\times\frac{1}{6} + 3\times1\times\frac{1}{6} + 3\times2\times\frac{1}{6} + 3\times3\times0$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} = \frac{6}{9} + \frac{17}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

2.3 Covariance

Définition :

Soit (X, Y) un couple de V.A.R. discrètes.
Si X et Y admettent chacun un moment d'ordre 2, alors $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance, et on appelle covariance de X et Y le réel :

$$\mathbf{cov(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)}.$$

Remarque :
_ en particulier, **cov(X, X) = V(X)**.
(car $\mathrm{cov}(X, X) = E\big((X - E(X))^2\big) = V(X)$)

Propriété : Formule de Huygens généralisée

Si X et Y admettent chacun un moment d'ordre 2, alors :

$$\mathbf{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).}$$

Démonstration : $(X - E(X))(Y - E(Y)) = XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)$
Donc $\mathrm{cov}(X,Y) = E\big(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\big)$
$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$ (par linéarité)
$= E(XY) - E(X)E(Y)$.

Remarque :
_ avec Y = X, on retrouve : $\mathrm{cov}(X, X) = E(XX) - E(X)E(X)$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Ex : suite de l'ex précédent : Déterminer cov(X, Y)

$X \longrightarrow U([[1; 3]])$ donc $E(X) = \frac{3+1}{2} = 2$

$E(Y) = 1 \times \frac{8}{18} + 2 \times \frac{5}{18} + 3 \times \frac{5}{18} = \frac{8 + 10 + 15}{18} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$

$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{2} - 2\times\frac{11}{6} = \frac{21}{6} - \frac{22}{6} = -\frac{1}{6}$.

Propriété :

Soit X, X', Y et Y' des VARD et a un réel. Alors (sous réserve d'existence) :
_ cov(Y, X) = cov(X, Y)
_ cov(X + X', Y) = cov(X, Y) + cov(X', Y)
cov(X, Y + Y') = cov(X, Y) + cov(X, Y')
cov(a.X, Y) = a.cov(X, Y)
cov(X, a.Y) = a.cov(X, Y) (bilinéarité de la covariance)
_ cov(X, a) = 0 cov(a, Y) = 0.

2.4 Covariance et indépendance

Propriété :

Soit X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** qui admettent chacune une espérance.
Alors XY admet une espérance, et **E(XY) = E(X)E(Y)**.

Démonstration : (dans le cas fini)
Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in \{1,\dots,n\}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in \{1, \dots, p\}\}$, alors

$$E(XY) = \sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p} x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p} x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j) \quad \text{(indépendants)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j P(X = x_i) P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i P(X = x_i) \sum_{j=1}^{p} y_j P(Y = y_j) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i P(X = x_i) E(Y) \right)$$

$$= E(Y) \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$= E(Y)E(X).$$

Propriété :

Soit X et Y deux variables discrètes qui admettent chacune une espérance.
Si X et Y sont **indépendantes**, alors X et Y admettent une covariance et **cov(X,Y) = 0**.

Démonstration :
si X, Y indépendants, cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = E(X)E(Y) – E(X)E(Y) = 0.

Remarque :
Attention, la réciproque est fausse : **il se peut que cov(X,Y) = 0 sans que X et Y soient indépendants**.

2.5 Corrélation linéaire

Définition :

Soit X et Y deux V.A.R. discrètes d'écart-type non nul.

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y le réel : $\boldsymbol{\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$.

Propriété :

Avec les hypothèses précédentes : $\boldsymbol{-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1}$.

Démonstration :

Posons $X' = X - E(X)$ et $Y' = Y - E(Y)$

Alors $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X'^2)$ $\quad V(Y) = E(Y'^2)$

$cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)) = E(X'Y')$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $Z = (tX' + Y')^2$ $\quad Z \geq 0$ donc $E(Z) \geq 0$

$E(Z) = E((tX' + Y')^2) = E(t^2X'^2 + 2tX'Y' + Y'^2) = t^2 E(X'^2) + 2tE(X'Y') + E(Y'^2)$.

Le polynôme en t est toujours positif donc $\Delta \leq 0$. $\quad 4E(X'Y')^2 - 4E(X'^2)E(Y'^2) \leq 0$

$E(X'Y')^2 \leq E(X'^2)E(Y'^2)$ $\quad \dfrac{cov^2(X,Y)}{V(X)V(Y)} \leq 1$ $\quad \rho^2(X,Y) \leq 1$ $\quad -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.

Remarques :

_ si $\boldsymbol{\rho(X,Y) = 0}$, on dit que X et Y sont **non corrélées**.

En particulier, si X et Y sont **indépendantes**, alors $\boldsymbol{\rho(X, Y) = 0}$.

Mais X et Y peuvent être non corrélées sans être indépendantes.

_ si $\rho(X, Y)$ est **proche de 1 ou -1**, on dit que **X et Y sont bien corrélées**.

_ si $\boldsymbol{\rho(X, Y) > 0}$ (ou $cov(X, Y) > 0$) : **quand X "est grand", Y "a tendance à être grand"**

($cov(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$ si $cov(X, Y) > 0$ $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$ sont plutôt de même signe)

si $\boldsymbol{\rho(X, Y) < 0}$: quand X "est grand", Y "a tendance à être petit".

Propriété :

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes.

S'il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que $\boldsymbol{Y = aX + b}$, alors $\boldsymbol{\rho(X,Y) = \begin{cases} 1 \text{ si } a > 0 \\ -1 \text{ si } a < 0 \end{cases}}$.

Démonstration :

$cov(X,aX + b) = acov(X, X) + cov(X,b) = aV(X) + 0 = aV(X)$

$$\rho(X,Y) = \frac{aV(X)}{\sigma(X)\sigma(aX + b)} = \frac{a\,\sigma^2(X)}{|a|\sigma^2(X)} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 \text{ si } a > 0 \\ -1 \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Exemple : Suite de l'exemple précédent. On a trouvé : $cov(X, Y) = -\dfrac{1}{6}$.

On admet que $V(X) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $\quad V(Y) = \dfrac{25}{36}$. Déterminer $\rho(X, Y)$.

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} \quad (\approx -0{,}24)$$

Remarque : $\rho(X, Y) < 0$, car plus X est grand (on obtient 2 ou 3), plus on a tendance à avoir Y petit (plus de chance d'obtenir 1).

3. Somme de V.A.R. discrètes

3.1 Cas général

Exemple :
Soit X et Y deux VAR telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On pose $Z = X + Y$.
Déterminer $(Z = 3)$.

$$(Z = 3) = ((X = 0)\cap(Y = 3))\cup((X = 1)\cap(Y = 2))\cup((X = 2)\cap(Y = 1))\cup((X = 3)\cap(Y = 0))$$
$$= \bigcup_{i=0}^{3} ((X = i)\cap(Y = 3 - i))$$

Propriété : **Loi de X + Y**

Soient X et Y deux V.A.R. avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{(X + Y = k) = \bigcup_{i \in X(\Omega) \text{ tel que } k - i \in Y(\Omega)} ((X = i) \cap (Y = k - i))}$

$$\mathbf{P(X + Y = k) = \sum_{i \in X(\Omega) \text{ tel que } k - i \in Y(\Omega)} P((X = i)) \cap (Y = k - i)}$$

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z.

$Z(\Omega) = \{2, 3, \ldots\}$

$\forall k \geq 2$, $(Z = k) = \cup_{i \geq 1, k - 1 \geq 1} ((X = i) \cap (Y = k - i))$

$\cup_{i=1}^{k-1} ((X = i) \cap (Y = k - i))$ $\quad k - i \geq 1 \Leftrightarrow i \leq k - 1$

$$\text{Donc } P(Z = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X = i))\cap(Y = k - i))$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) \text{ (par indépendance)}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1}pq^{k-i-1}p$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} p^2q^{k-2}$$
$$= (k - 1)p^2q^{k-2}$$

Remarque :
Si X et Y représentent le rang du premier succès lors d'épreuves indépendantes, $Z = X + Y$ représente le rang du deuxième succès. (loi de Pascal)
On peut aussi écrire, pour $k \geq 2$:

$(Z = k) = (S_1 \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k) \cup \ldots \cup (\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-2}} \cap S_{k-1} \cap S_k)$ (2 succès, $k - 2$ échecs)

donc $P(Z = k) = (k - 1)p^2q^{k-2}$

Propriété : **Linéarité de l'espérance**

Si X et Y sont deux V.A.R.D. qui admettent une espérance, alors X + Y admet une espérance et
E(X + Y) = E(X) + E(Y).

Propriété : **Variance d'une somme**

Soit X et Y deux V.A.R.D. qui admettent chacune une variance, alors X + Y admet une variance, et
V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y).

Démonstration :
$V(X + Y) = \mathrm{cov}(X + Y, X + Y)$
$= \mathrm{cov}(X, X) + \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(Y, X) + \mathrm{cov}(Y,Y)$ (par bilinéarité)
$= V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$.

Remarque : On a donc aussi : $\mathbf{cov(X,Y) = \dfrac{V(X + Y) - V(X) - V(Y)}{2}}$
(utile si on connait la loi de X, la loi de Y et la loi de X + Y)

Propriété :

Si X et Y sont deux V.A.R. discrètes **indépendantes** qui admettent chacune une variance, alors X + Y admet une variance, et **V(X + Y) = V(X) + V(Y)**.

Démonstration : immédiate, puisque cov(X, Y) = 0.

Attention : (si existence)
E(X + Y) = E(X) + E(Y) si X, Y **quelconques**
V(X + Y) = V(X) + V(Y) si X, Y **indépendantes**
E(XY) = E(X)E(Y) si X, Y **indépendantes**

Exemple :
Dans l'exemple précédent ($Z = X + Y$ avec $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$, $Y \longrightarrow \mathcal{G}(p)$ et X et Y indépendantes), déterminer E(Z) et V(Z).

_ X et Y admettent une espérance donc Z aussi et $E(Z) = E(X) + E(Y) = \dfrac{2}{p}$

_ X et Y admettent une variance et sont indépendantes, donc $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 2 \times \dfrac{1-p}{p^2}$

3.2 Cas particuliers à connaître

Propriété : **Somme de lois binomiales indépendantes**

Soit $p \in]0;1[$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$
Soit X_1 et X_2 deux V.A.R. **indépendantes** qui suivent respectivement les lois $\mathcal{B}(\mathbf{n_1,p})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{n_2,p})$.
Alors $\mathbf{X = X_1 + X_2}$ **suit la loi** $\mathcal{B}(\mathbf{n_1 + n_2, p})$.

Démonstration :
Considérons $n_1 + n_2$ épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité p.
Soit X_1 le nombre de succès lors des n_1 premières épreuves, et X_2 le nombre de succès lors des n_2 dernières épreuves. Alors $X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \longrightarrow \mathcal{B}(n_2,p)$ et X_1, X_2 sont indépendantes.
Et $X = X_1 + X_2$ est le nombre de succès lors des $n_1 + n_2$ épreuves. Donc $X \longrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2,p)$.

Propriété : **Somme de lois de Poisson indépendantes**

Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}+$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes telles que :
$X_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et X_1, X_2 **indépendantes**.
Alors $\mathbf{X = X_1 + X_2 \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)}$.

Démonstration :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum_{i=0}^{k} P((X_1 = i) \cap (X_2 = k - i))$

$= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i)P(X_2 = k - i)$ (X_1, X_2 indépendantes)

$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda 1}}{i!} \times \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda 2}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda 1 + \lambda 2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!k!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$

$= \frac{e^{-(\lambda 1 + \lambda 2)}}{k!} \times \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda 1 + \lambda 2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$. $X \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Remarques :
_ la somme de deux lois géométriques indépendantes n'est pas une loi géométrique (= rang du 2e succès)
_ la somme de deux lois uniformes indépendantes n'est pas une loi uniforme (Ex : somme de deux dés).

4. Loi de max(X, Y), min(X, Y)

Méthode :

Soient X et Y deux V.A.R.D. telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
_ si **Z = max(X,Y)**, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z \leq k)$ = "les deux sont $\leq k$"
$\mathbf{(Z \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)}$. (ou avec <)
_ si **Z = min(X, Y)** alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z \geq k)$ = "les deux sont $\geq k$"
$\mathbf{(Z \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k)}$. (ou avec >)

Remarques :
_ Le minimum est parfois noté Inf, le maximum est parfois noté Sup.
_ Rappel : si $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$ = P("les k premiers essais sont des échecs") $= (1 - p)^k$

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p. On pose Z = max(X,Y).
Déterminer $P(Z \leq k)$ (pour $k \geq 0$) puis la loi de Z.

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $\forall k \geq 1$, $P(Z \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$
Or $P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - q^k$ (les k premiers sont des échecs)
De même $P(Y \leq k) = 1 - q^k$. Donc $P(Z \leq k) = (1 - q^k)^2$
$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$

5. Compléments : Autres exemples issus d'un couple de V.A.R.

5.1 P(X = Y)

Propriété :

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = I$.

Alors $\mathbf{P(X = Y) = \sum_{i \in I} P((X = i) \cap (Y = i))}$

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0 ;1[$. Déterminer P(X = Y).

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i)\cap(Y = i))$

$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)(Y = i)$ (X, Y indépendantes)

$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1}pq^{i-1}p$

$= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1}$

$= p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j$ $(j = i - 1)$

$= p^2 \times \dfrac{1}{1 - q^2}$ (car $q^2 \neq 1$)

$= \dfrac{p^2}{1 - (1 - p)^2} = \dfrac{p^2}{2p - p^2} = \dfrac{p}{2 - p}$

Remarque : De même, $P(Y > X) = \sum_{i \in I} P((X = i) \cap (Y > i))$

5.2 Loi de Y – X

Propriété :

Soit X et Y deux V.A.R. à valeurs entières. On pose Z = Y – X.

Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P(Z = k)} = \displaystyle\sum_{i \in X(\Omega),\ \text{tel que } k + i \in Y(\Omega)} \mathbf{P((X = i)\cap(Y = k + i))}$

Exemple :
Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$. Soit X et Y deux V.A.R. indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$.
On pose Z = Y – X. Déterminer la loi de Z.

$Z(\Omega) = \mathbb{Z}$.

_ pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i)\cap(Y = k + i))$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)P(Y = k + i)$ (indépendants)

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1}pq^{i+k-1}p = q^k \sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1}pq^{i-1} = q^k \times \frac{p}{2-p}$ (d'après la question précédente)

_ pour $k < 0$ $P(Z = k) = P(Y - X = k) = P(X - Y = -k) = \dfrac{pq^{-k}}{1+q}$ car X et Y rôles symétriques

Remarques :
_ Si X et Y admettent une espérance, alors par linéarité $E(Y - X) = E(Y) - E(X)$.
_ Si X et Y admettent une variance et si X et Y sont indépendantes,
$V(Y - X) = V(Y + (-X)) = V(Y) + V(-X) = V(Y) + (-1)^2V(X) = V(Y) + V(X)$.
_ $P(Y - X = 0) = P(Y = X)$