## Chapitre 10 : Couples de VARD – Correction exercices niveau 2

**Exercice 1**

**1)** $\sum_{k\geq 0}\frac{k}{k!} = 0 + \sum_{k\geq 1}\frac{k}{k!} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k'\geq 0}\frac{1}{k'!}$ (avec k' = k – 1) $= \sum_{k'\geq 0}\frac{1^{k'}}{k'!}$

On reconnait la série exponentielle qui converge. Donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!} = e^1 = e$.

$\sum_{k\geq 0}\frac{k(k-1)}{k!} = 0 + 0 + \sum_{k\geq 2}\frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k\geq 2}\frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k'\geq 0}\frac{1}{k'!}(k' = k-2)$

Donc la série converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!} = e$.

2) a) On cherche la loi marginale de X.

D'après la formule des probabilités totales avec le S.C.E. $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$ :

$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i)\cap(Y = j)) = \sum_{j=0}^{+\infty} c.\frac{i+j}{i!\,j!} = \frac{c}{i!}\left(i\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!}\right) = \frac{c}{i!}(i.e + e) = \frac{c.e(i+1)}{i!}$

Donc $\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c.e(i+1)}{i!} = ce\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\right) = ce(e + e) = 2e^2c$. $\quad\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) = 1$ donc $c = \frac{1}{2e^2}$.

b) $\sum_{i\geq 0} i.P(X = i) = \sum_{i\geq 0} i.\frac{c.e(i+1)}{i!} = c.e\sum_{i\geq 0}\frac{i(i-1)+2i}{i!} = \frac{1}{2e}\left(\sum_{i\geq 0}\frac{i(i-1)}{i!} + 2\sum_{i\geq 0}\frac{i}{i!}\right)$

Les séries convergent absolument, donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{2e}(e + 2e) = \frac{3}{2}$.

c) $P(X = 0) = \frac{1}{2e}$ et par symétrie entre X et Y $P(Y = 0) = \frac{1}{2e}$.

$P((X = 0)\cap(Y = 0)) = 0 \neq P(X = 0).P(Y = 0)$ Les variables ne sont pas indépendantes.

3.a) Posons Z = X + Y – 1.

$P((X = 0)\cap(Y = 0)) = 0$ Les deux variables ne s'annulent pas en même temps. Donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, (Z = k) = \bigcup_{i=0}^{k+1}\big((X = i)\cap(Y = k+1-i)\big)$

donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k+1} P\big((X = i)\cap(Y = k+1-i)\big) = \frac{1}{2e^2}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{k+1}{i!(k+1-i)!} = \frac{1}{2e^2}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{k!}\,\frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}$

$= \frac{1}{2e^2}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{k!}\binom{k+1}{i} = \frac{1}{2e^2}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}1^i1^{k+1-i} = \frac{1}{2e^2}\frac{1}{k!}2^{k+1} = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$. Donc X + Y – 1 suit la loi $\mathcal{P}(2)$.

**Exercice 2** $\forall t \in [-1;1], G_{X+Y}(t) = E\big(e^{t(X+Y)}\big) = E(e^{tX}e^{tY})$

Or $e^{tX}$ et $e^{tY}$ sont indépendantes donc $G_{X+Y}(t) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = G_X(t)G_Y(t)$.

**Exercice 3**

1) a) $\forall n \geq 1$, $s_{n+1}(N) - s_n(N) = s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n} = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}\left(\frac{k}{N} - 1\right) = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}\frac{k-N}{N}$.

$\forall k \in \{1, \ldots, N-1\}$, $\frac{k-N}{N} \leq 0$ et $\left(\frac{k}{N}\right)^n \geq 0$ donc $\left(\frac{k}{N}\right)^n\frac{k-N}{N} \leq 0$ donc $s_{n+1}(M) - s_n(M) \leq 0$.

La suite est décroissante.

De plus $s_n(N)$ est une somme de nombres positifs, donc est positif.

La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

b) Le nombre de termes de la somme est fixe et $\forall\ k \in \{1, \ldots, N-1\}$, $-1 < \frac{k}{N} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(N) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} 0 = 0$

2. $\forall\ k \in \{0, \ldots, n\}$, $P(T_n \leq k) = P\big((X_1 \leq k) \cap \ldots \cap (X_n \leq k)\big)$

$= P(X_1 \leq k) \times \ldots \times P(X_n \leq k)$ par indépendance

$= P(X_1 \leq k)^n$ (même loi)

Or $P(X_1 \leq k) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(X_1 = i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{N} = \frac{k}{N}$. Donc $P(T_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

$\forall\ k \in \{1, \ldots, n\}$, $P(T_n = k) = P(T_n \leq k) - P(T_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$.

b) $T_n(\Omega) = \{1, \ldots, N\}$, donc $T_n$ admet une espérance et

$E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} k.P(T_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n$

$= \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum\limits_{k'=0}^{N-1} (k'+1)\left(\frac{k'}{N}\right)^n$ (avec $k' = k - 1$)

$= \sum\limits_{k=1}^{N} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum\limits_{k=0}^{N-1} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = N\left(\frac{N}{N}\right)^n - 0\left(\frac{0}{N}\right)^n - s_n(N) = N - s_n(N)$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = N$.

**Exercice 4** 1) a) $n \leq M$ et $n \leq N - M$ donc on peut choisir n boules blanches et choisir n boules noires.
Donc $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$.

b) $\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$ $(X = k)$ = "on tire k boules blanches et $n - k$ boules noires".

Donc $P(X = k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

2) a) $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ $P(X_i = 1) = \dfrac{1 \times \binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$ (la boule i et $n - 1$ autres) $= \dfrac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \dfrac{n!(N-n)!}{N!} = \dfrac{n}{N}$.

b) $X_i \longrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n}{N}\right)$ donc $E(X_i) = \frac{n}{N}$ et $V(X_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$

3) a) $X_iX_j(\Omega) = \{0,1\}$ $P((X_iX_j = 1) = P((X_i = 1)\cap(X_j = 1)) = P($"on tire les boules i et j"$)$

$= \dfrac{1 \times 1 \times \binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}}$ (les deux boules i et j et $n - 2$ boules parmi les $N - 2$ autres)

$= \dfrac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!} \times \dfrac{n!(N-n)!}{N!} = \dfrac{n(n-1)}{N(N-1)}$

$E(X_iX_j) = 0 \times P((X_iX_j = 0) + 1 \times P((X_iX_j = 1) = \dfrac{n(n-1)}{N(N-1)}$.

b) $\text{cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$

$= \dfrac{n(n-1)}{N(N-1)} - \dfrac{n^2}{N^2} = \dfrac{Nn(n-1) - n^2(N-1)}{N^2(N-1)} = \dfrac{n(Nn - N - nN + n)}{N^2(N-1)} = \dfrac{n(n-N)}{N^2(N-1)}$

3) a) $X = X_1 + \ldots + X_M = \sum\limits_{i=1}^{M} X_i$ b) donc par linéarité $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{M} E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{M} \frac{n}{N} = \frac{nM}{N}$.

c) $\sum_{1 \le i < j \le M} 1 = \sum_{j=1}^{M} \left( \sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} (j-1) = \sum_{j'=0}^{M-1} j'$ (avec $j' = j - 1$) $= \dfrac{(M-1)M}{2}$

$V(X) = \sum_{i=1}^{M} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le M} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{M} \dfrac{n}{N}\left(1 - \dfrac{n}{N}\right) + 2\dfrac{n(n-N)}{N^2(N-1)} \sum_{1 \le i < j \le M} 1$

$= M\dfrac{n}{N}\left(1 - \dfrac{n}{N}\right) + 2\dfrac{n(n-N)}{N^2(N-1)}\dfrac{(M-1)M}{2}$

$= \dfrac{Mn(N-n)}{N^2} + \dfrac{n(n-N)(M-1)M}{N^2(N-1)} = \dfrac{Mn(N-n)}{N^2(N-1)}(N - 1 - (M-1)) = \dfrac{Mn(N-n)}{N^2(N-1)}(N-M)$

**Exercice 5** a) Si X et Y sont indépendantes :

$\forall i \in [[1,q]]$, $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{r} y_j P_{(X = x_i)}(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{r} y_j P(Y = y_j) = E(Y)$. $\varphi$ est constante. $Z = E(Y)$.

b) $E(X|X)$ : $\forall i \in [[1,q]]$,

$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{r} x_j P_{(X = x_i)}(X = x_j) = P_{(X = x_i)}(X = x_j) = 0$ si $j \neq i$ et 1 pour $j = i$ : donc $\varphi(x_i) = x_i$ $E(X|X) = X$.

c) $P([E(Y|X) = \varphi(x_i)]) = P(\varphi(X) = \varphi(x_i))$ $\varphi$ est injective donc $P(\varphi(X) = \varphi(x_i)) = P(X = x_i)$.

d) D'après le théorème de transfert, $E(E(Y|X)) = E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{q} \varphi(x_i)P(X = x_i)$

$= \sum_{i=1}^{q} \left( \left( \sum_{j=1}^{r} y_j P_{(X = x_i)}(Y = y_j) \right) P(X = x_i) \right) = \sum_{i=1}^{q} \left( \sum_{j=1}^{r} y_j P_{(X = x_i)}(Y = y_j) P(X = x_i) \right)$

$=$ (permutation des sommes) $\sum_{j=1}^{r} \left( \sum_{i=1}^{q} y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right)$

$= \sum_{j=1}^{r} \left( y_j \sum_{i=1}^{q} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right) = \sum_{j=1}^{r} y_j P(Y = y_j)$ (formule des probabilités totales) $= E(Y)$.

e) Soit $Z = aX + bY + c$. $Z(\Omega) = \{ax_i + by_j + c,\ i \in \{1, \dots, q\},\ j \in \{1, \dots, r\}\}$.

$\forall k \in [[1,q]]$, $\varphi_Z(x_k) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r} (ax_i + by_j + c)P_{(X = x_k)}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

$P_{(X = x_k)}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 0$ si $i \neq k$. Donc

$\varphi_Z(x_k) = \sum_{j=1}^{r} (ax_k + by_j + c)P_{(X = x_k)}((X = x_k) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j=1}^{r} (ax_k + by_j + c)P_{(X = x_k)}(Y = y_j)$

$= (ax_k + c) \sum_{j=1}^{r} P_{(X = x_k)}(Y = y_j) + b\sum_{j=1}^{r} y_j P_{(X = x_k)}(Y = y_j) = (ax_k + c) \times 1 + b\varphi_Y(x_k)$

Donc $\varphi_Z(X) = aX + c + b\varphi_Y(X)$ $E(aX + bY + c|X) = aX + c + bE(Y|X)$.