Exercice 1 (d'après oral HEC)

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X=i] \cap [Y=j]) = c \cdot \frac{i+j}{i! j!}.$$

1. Montrer que les séries $\sum_{k \geq 0} \frac{k}{k!}$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{k(k-1)}{k!}$ convergent et déterminer de la somme de ces séries.
- 2.a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $P(X = i) = c \frac{(i+1)}{i!} e$. En déduire la valeur de c .
- b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X + Y - 1$. (*on trouvera une loi usuelle*)

Exercice 2

Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X la fonction qui à $t \in [-1;1]$ associe $G_X(t) = E(t^X)$. On admet que cette espérance existe.

Soient X et Y deux VAR indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $\forall t \in [-1;1], G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$.

Exercice 3

On admet que les définitions et résultats pour deux variables aléatoires discrètes s'étendent de manière naturelle dans le cas d'une famille plus grande.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant chacune la loi uniforme discrète sur $[[1;N]]$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

- a) Montrer que la suite $(s_n(N))_{n \geq 1}$ est strictement monotone et convergente.
- b) Trouver sa limite.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
 - a) Calculer, pour $k \in [[1,n]]$, $P(T_n = k)$.
 - b) Montrer que $E(T_n) = N - s_n(N)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

Exercice 4 – Loi hypergéométrique

On admet que si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires finies, alors

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Soient M et N deux entiers tels que $2 \leq M \leq N$. Une urne contient N boules : M boules blanches et $N - M$ boules noires.

Soit n un entier tel que $n \leq M$ et $n \leq N - M$. On tire au hasard n boules de l'urne simultanément. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. a) Déterminer $X(\Omega)$ (en le justifiant).
- b) Déterminer la loi de X .

Dans la suite, on numérote les boules blanches de 1 à M , et pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré la boule i et égale à 0 sinon.

2) a) Pour $i \in \{1, \dots, M\}$, montrer que $P(X_i = 1) = \frac{n}{N}$.

b) En déduire la loi de X_i , son espérance et sa variance.

3) Soient $i, j \in \{1, \dots, M\}$, avec $i \neq j$.

a) Déterminer $P(X_i X_j = 1)$ et montrer que $E(X_i X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$

b) Déterminer $\text{cov}(X_i, X_j)$.

4. a) Exprimer X à l'aide des $(X_i)_{1 \leq i \leq M}$.

b) En déduire l'espérance de X .

c) Déterminer $\sum_{1 \leq i < j \leq M} 1$. En déduire que $V(X) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

Exercice 5 – Espérance conditionnelle

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_q\} \subset \mathbb{R}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset \mathbb{R}$, respectivement ($q \geq 2$ et $r \geq 2$).

On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, on a $P(X = x_i) > 0$.

Soit φ la fonction définie sur $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^r y_j P_{(X=x_i)}(Y = y_j).$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $\varphi(x_i)$ est l'espérance conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = x_i]$, notée également $E(Y|X = x_i)$. On définit alors une variable Z sur Ω en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = E(Y|[X = X(\omega)])$ et on note $Z = E(Y|X) = \varphi(X)$.

1. a) On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer la variable aléatoire $E(Y|X)$.

b) Quelle est la variable aléatoire $E(X|X)$?

c) On suppose que les réels $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts.

Déterminer pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $P([E(Y|X) = \varphi(x_i)])$.

d) Montrer que $E(E(Y|X)) = E(Y)$ (on pourra appliquer le théorème du transfert).

e) Soit trois réels a, b, c . Notons $Z = aX + bY + c$.

En remarquant que $\forall k \in \{1, \dots, q\}, \varphi_Z(x_k) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r (ax_i + by_j + c) P_{(X=x_k)}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$,

montrer que $E(aX + bY + c|X) = aX + bE(Y|X) + c$.