Chapitre 10 : Couples de V.A.R.D. – Feuille n°1

Exercice 1
Une urne contient 2 boules bleues et 2 boules rouges.
On tire simultanément 2 boules de cette urne, et on note X le nombre de boules bleues tirées.
On replace ces deux boules, puis on en retire deux simultanément.
On note Y le nombre de boules bleues tirées en tout.
1) Déterminer la loi de X, E(X) et V(X).
2) Calculer la loi conjointe du couple (X, Y). *(on présentera le résultat sous la forme d'un tableau.)*
3) Déterminer la loi de Y.

Exercice 2
Soit $p \in \,]0;1[$, $p \neq 1/2$. On note $q = 1 - p$. On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est p. On lance cette pièce jusqu'à faire un premier pile. On note X le nombre de lancers. On continue à lancer cette pièce jusqu'à faire face. On note Y le nombre de lancers en tout.
1) Déterminer la loi de X.
2) $\forall\, i \geq 1$, $\forall\, j \geq 2$, déterminer $P((X = i) \cap (Y = j))$ (on distinguera deux cas).
3) a) Pour $j \geq 2$, montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{q}{p^{j-1}} \times \frac{p^{j-1} - q^{j-1}}{p - q}$
b) En déduire la loi de Y.
4) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3
On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres. La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t. On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné. N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés. X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés. Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.
1. Calculer, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$ (on pourra distinguer plusieurs cas).
2. a) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\, t^k}{k!} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} \lambda^n (1-t)^{n-k}$
b) En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. Quelle est la loi de Y ?
4. a) Soit $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $(X = i)\cap(Y = j)$ à l'aide de X et N.
En déduire que $P((X = i)\cap(Y = j)) = \dfrac{e^{-\lambda}\, \lambda^{i+j}\, t^i (1-t)^j}{i!j!}$.
b) Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 4 Soit $n \geq 1$. Déterminer l'expression de $C_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i^2}{2j+1} \right)$

Exercice 5
1) Dans l'exercice 1, déterminer cov(X, Y).
2) On note Z la V.A.R. égale au nombre de boules bleues tirées au deuxième tirage.
Exprimer Y en fonction de X et Z et retrouver la valeur de cov(X,Y).