Chapitre 10 : Couples de V.A.R.D : Feuille n°2

Exercice 1
Soit $n \geq 1$. On considère n boites numérotées de 1 à n.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la boite i contient i boules numérotées de 1 à i.
On choisit au hasard une boite, puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule tirée.
1) Déterminer la loi de X et E(X).
2) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P_{(X = i)}(Y = j)$ (on distinguera deux cas).
3) En déduire la loi de Y (on ne calculera pas la somme).
4) Déterminer E(Y) (à l'aide d'une permutation des sommes, on montrera que $E(Y) = \frac{n+3}{4}$).
5) Montrer que $E(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$. Déterminer cov(X,Y).

Exercice 2
On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $p = \frac{2}{3}$.
On lance cette pièce jusqu'à faire un premier pile. On note X le nombre de lancers.
On relance ensuite cette pièce jusqu'à faire face. On note Y le nombre de lancers supplémentaires. Soit Z le nombre de lancers en tout.
1) Quelles sont les lois de X et Y ? Déterminer E(X), V(X), E(Y), V(Y).
2) Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire E(Z) et V(Z).
3) a) Montrer que $\forall\, k \geq 2$, $P(Z = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$.
b) En déduire la loi de Z.

Exercice 3
Soit $n \geq 1$. On répartit au hasard n boules dans 3 sacs notés S_1, S_2, S_3 indépendamment les unes des autres. On note, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, N_i le nombre de boules dans le sac S_i.
1) Déterminer les espérances et les variances de N_1, N_2, N_3.
2) Les variables aléatoires N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?
3) a) Déterminer la loi de $N_1 + N_2$.
b) En déduire la covariance de (N_1, N_2), et le coefficient de corrélation linéaire. Commenter le signe.

Exercice 4
Soit $p \in]0;1[$. et $q = 1 - p$. Soit X et Y deux VAR indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que $Z = \min(X,Y)$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - q^2)$.

Exercice 5
Soit $\lambda > 0$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de Poisson de paramètre λ.
1) Soit F_X la fonction de répartition de X.
Pour $k \in \mathbb{N}$, rappeler l'expression de $F_X(k)$ sous forme d'une somme.
2) Soit $Z = \sup(X, Y)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $P(Z = k)$ en fonction de F_X.