Chapitre 10 : Couples de VARD – Feuille n°3

Exercice 1

Soit $p \in]0;1[$

On considère trois V.A.R.D. X_1, X_2, X_3 indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$.

On pose, $Y_1 = X_1X_2$ et $Y_2 = X_2X_3$.

1) Déterminer les lois de Y_1 et Y_2, ainsi que les espérances et les variances.

2) a) Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2)$.

3) Posons $U = Y_1 + Y_2$. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Exercice 2 (En plus)

On considère une V.A.R. X suivant la loi uniforme sur $\{1;2\}$ et une V.A.R. Y, indépendante de X, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la V.A.R. Z par : $Z = X.Y$.

1) Rappeler la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$. En déduire $E(X^2)$.

2) Rappeler la loi de Y, $E(Y)$ et $V(Y)$. En déduire $E(Y^2)$.

3) Déterminer la loi de Z (on distinguera les cas $Z = 2k$ et $Z = 2k + 1$, où $k \in \mathbb{N}$).

4) a) Déterminer l'espérance de Z.

b) Déterminer $E(Z^2)$. En déduire la variance de Z.

Exercice 3

Soit $p \in]0;1[$. Soit X et Y deux V.A.R. indépendantes qui suivent respectivement les lois géométriques $\mathcal{G}(1/2)$ et $\mathcal{G}(p)$. On pose $Z = Y - X$. et $U = |Y - X|$

1) Déterminer $P(Z = 0)$.

2) a) Soit $n \geq 0$. Déterminer $P(Z = n)$.

b) En déduire $P(Y \geq X)$.

3) Soit $n \geq 1$. Déterminer $P(Z = -n)$.

4) a) Déterminer $P(U = 0)$.

b) Soit $n \geq 1$. Déterminer $P(U = n)$.