Chapitre 11 – Intégration sur un segment - Correction Exercices niveau 2

Exercice 1

1) Posons $t = \alpha + (\beta - \alpha)x$ donc $x = \dfrac{t - \alpha}{\beta - \alpha}$ $\dfrac{dt}{dx} = \beta - \alpha$ $dt = (\beta - \alpha)dx$

Quand $t = \alpha$ $x = \dfrac{\alpha - \alpha}{\beta - \alpha} = 0$ quand $t = \beta$ $x = \dfrac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$

Donc $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta g(t)dt = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\int_0^1 g\big(\alpha + (\beta - \alpha)x\big)(\beta - \alpha)dx = \int_0^1 g\big(\alpha + (\beta - \alpha)x\big)dx$

2) On a : $\dfrac{1}{b - c}\int_c^b g(t)dt = \int_0^1 g(c + (b - c)x)dx = I$ $\dfrac{1}{d - c}\int_c^d g(t)dt = \int_0^1 g(c + (d - c)x)dx = J$

$\dfrac{1}{d - a}\int_a^d g(t)dt = \int_0^1 g(a + (d - a)x)dx = K$

$d \le b$ donc $d - c \le b - c$ donc $\forall x \in [0;1]$, $(d - c)x \le (b - c)x$ $c + (d - c)x \le c + (b - c)x$
g est croissante sur I, donc $g(c + (d - c)x) \ge g(c + (b - c)x)$
Par croissance de l'intégrale $\int_0^1 g(c + (d - c)x)dx \ge \int_0^1 g(c + (b - c)x)dx$ $J \ge I$

$\forall x \in [0;1]$ $a + (d - a)x - (c + (d - c)x) = a - ax - c + cx = a(1 - x) - c(1 - x) = (a - c)(1 - x)$
$c > a$ donc $a - c < 0$ $\forall x \in [0;1]$ $(1 - x) \ge 0$ donc $(a - c)(1 - x) \le 0$
$a + (d - a)x \le c + (d - c)x$ donc $g(a + (d - a)x) \ge g(c + (d - c)x)$
et $\int_0^1 g(a + (d - a)x)dx \ge \int_0^1 g(c + (d - c)x)dx$ $K \ge J$.

Donc $\dfrac{1}{b - c}\int_c^b g(t)dt \le \dfrac{1}{d - c}\int_c^d g(t)dt \le \dfrac{1}{d - a}\int_a^d g(t)dt$.

Exercice 2

1) Soit $g(t) = \dfrac{e^t}{t}$ et G une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

Alors $\forall x \in]0; +\infty[$, $F(x) = G(x) - G(1)$ donc $F'(x) = G'(x) = g(x) = \dfrac{e^x}{x} > 0$. Donc F est strictement croissante. Soit $x \in]0;1]$ $F(x) = -\int_x^1 \dfrac{e^t}{t}dt$

sur $[x;1]$ $x \le t \le 1$ $e^x \le e^t$ $\dfrac{e^x}{t} \le \dfrac{e^t}{t}$

Par croissance de l'intégrale : $\int_x^1 \dfrac{e^x}{t}dt \le \int_x^1 \dfrac{e^t}{t}dt$ $e^x\,[\ln(t)]_x^1 \le -F(x)$ $-e^x\ln(x) \le -F(x)$

$F(x) \le e^x\ln(x)$ $\lim\limits_{x \to 0} e^x\ln(x) = -\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = -\infty$.

2) Astucieux : $\forall x \ge 0$, $e^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \sum\limits_{k=3}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ $\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k!} \ge 0$ donc $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Ou : Posons $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ $f'(x) = e^x - 1 - x$ $f''(x) = e^x - 1$ $e^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Donc f '' est positive sur $[0; +\infty[$, donc f ' est croissante sur $[0; +\infty[$
Or $f'(0) = 0$ donc f ' est positive sur $[0; +\infty[$. Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
Or $f(0) = 0$ donc f est positive sur $[0; +\infty[$.

Soit $x \ge 1$. Pour tout $t \in [1,x]$ $e^t \ge 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$ $\dfrac{e^t}{t} \ge \dfrac{1}{t} + 1 + \dfrac{t}{2}$

Par croissance de l'intégrale : $F(x) \ge \int_1^x \left(\dfrac{1}{t} + 1 + \dfrac{t}{2}\right)dt = \left[\ln(t) + t + \dfrac{t^2}{2}\right]_1^x$

$F(x) \ge \ln(x) + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ par comparaison

$\dfrac{F(x)}{x} \ge \dfrac{\ln(x)}{x} + 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{F(x)}{x} = +\infty$ par comparaison.

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f_a(t)dt = \int_{x-1}^{x+1} e^{at}dt$

Si $a \neq 0$, $T(f_a)(x) = \left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{a}(e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)})$

Si $a = 0$ $T(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x+1} 1dt = x + 1 - (x - 1) = 2$

2. a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.
Donc $T(f)(x) = F(x + 1) - F(x - 1)$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc T(f) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (comme différence de fonctions de classe C^1) et donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$. (donc appartient à E).
De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)'(x) = 1 \times F'(x + 1) - 1\times F'(x - 1) = f(x + 1) - f(x - 1)$.
b) Si f est bornée sur $\mathbb{R}$: il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $-M \leq f(t) \leq M$.
Comme $x - 1 \leq x + 1$, d'après l'inégalité de la moyenne,
$-M(x + 1 - (x - 1)) \leq \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \leq M(x + 1 - (x - 1))$

$-2M \leq T(f)(x) \leq 2M$ donc T(f) est bornée.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $|T(f)'(x)| \leq |f(x + 1)| + |f(x - 1)|$ (inégalité triangulaire) $\leq 2M$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq 2M|x - y|$

$K = 2M$ convient.
3. a) On a déjà vu que si $f \in E$, alors $T(f) \in E$. De plus :
Soit $f \in E$, $g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f + g) = \int_{x-1}^{x+1} (\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt + \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$

Donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$.
Donc T est un endomorphisme de E.
Si $f \in E$, on a vu que T(f) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction valeur absolue ($\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$).

g est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g \in E$. Mais g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc il n'existe pas de fonction $f \in E$ telle que $T(f) = g$. T n'est pas surjectif.
b) Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$: il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} (a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n)dt$

$= \left[a_0t + a_1\frac{t^2}{2} + \dots + a_n\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{x-1}^{x+1} = a_0(x + 1) + a_1\frac{(x + 1)^2}{2} + \dots + \frac{a_n(x + 1)^{n+1}}{n + 1} - a_0(x - 1) - \frac{a_1(x - 1)^2}{2} - \dots - \frac{a_n(x - 1)^{n+1}}{n + 1}$ donc $T(f) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

De plus le coefficient en x^{n+1} est : $\frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n + 1} = 0$ donc $T(f) \in \mathbb{R}_n[X]$. $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) $T_n(1) = (X+1) - (X - 1) = 2$
$T_n(X) = \frac{(X + 1)^2}{2} - \frac{(X - 1)^2}{2} = \frac{X^2 + 2X + 1 - (X^2 - 2X + 1)}{2} = 2X$.

De façon générale, $T_n(X^k) = \frac{(X + 1)^{k+1} - (X - 1)^{k+1}}{k + 1}$

Le coefficient en X^{k+1} s'annule. Le coefficient en X^k vaut $\frac{(k + 1) + (k + 1)}{k + 1} = 2$

Donc A est triangulaire et les coefficients diagonaux sont tous égaux à 2.
Donc A est inversible, donc T_n est bijective.