

Chapitre 11 : Intégration sur un segment – Exercices niveau 2

Exercice 1 (ESSEC 2011)

Soit g une fonction continue sur un intervalle I , à valeurs réelles.

1) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \int_0^1 g(\alpha + (\beta - \alpha)x) dx$$

2) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$. On suppose que g est décroissante sur I , établir l'encadrement : $\frac{1}{b - c} \int_c^b g(t) dt \leq \frac{1}{d - c} \int_c^d g(t) dt \leq \frac{1}{d - a} \int_a^d g(t) dt$.

Exercice 2

Pour tout réel strictement positif, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Etudier les variations de F . A l'aide d'une inégalité, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$.

2. Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et en déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$$

Exercice 3 (Oral HEC 2015)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Pour toute fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

2. a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.

b) On suppose que f est une fonction bornée de E . Montrer que $T(f)$ est bornée, et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x - y|$.

3. Soit T l'application de E dans E qui à f associe $T(f)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E . Est-il surjectif ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Montrer que $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit A la matrice de T_n dans la base $\mathcal{B}$.

T_n est-il bijectif ?