Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ (appelée série harmonique alternée) est convergente et calculer sa somme.

1. a) Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [0;1]$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+1}$.

b) Etablir enfin que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Exercice 2 (Constante d'Euler)

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

2) Montrer que $\forall n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3) Montrer que : $\forall n \geq 1, H_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n$

puis que : $\forall n \geq 2, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

4) En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que sa limite, notée γ appartient à $[0;1]$.

Remarque : γ est appelée la constante d'Euler, on a : $\gamma \approx 0,577$

On a donc $u_n =_{+\infty} \gamma + o(1)$ $\quad$ $H_n =_{+\infty} \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur [0;1]. On suppose que $\int_0^1 (f(x) - x)^2 e^{-x} dx = 0$.

Déterminer l'expression de f.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+2}.dt$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t^2+1} dt$.

1. Montrer que f est impaire.
2. a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Donner les variations de f.

c) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt$, puis montrer que $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3. a) Montrer que $\forall x \geq 0, \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \leq f(x)$

b) En déduire, à l'aide de la majoration obtenue à la question 2.c) un équivalent de f(x) au voisinage de $+\infty$.