

Chapitre 11 : Intégration sur un segment

1. Primitives et intégrales

Rappels : $\forall x > 0$,

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$x^{3/2} = x^1 x^{1/2} = x\sqrt{x}$$

$$x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

1.1 Primitives d'une fonction continue

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable sur I** et telle que **$F' = f$** .

Propriété :

Si f est une fonction **continue sur un intervalle I** , alors f admet des primitives sur I .

Si F est une primitive de f sur I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Primitives des fonctions usuelles :

Si $f(x) =$	Une primitive F de f est :	sur
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$	selon α
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$	$] 0; +\infty[$

Ex : primitives de $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \longrightarrow F(x) = \frac{1}{-3} x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$

Propriété :

Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit U une primitive de u sur I et V une primitive de v sur I . Alors :

— $U + V$ est une primitive de $u + v$ sur I

— λU est une primitive de λu sur I .

Attention UV n'est pas une primitive de uv !

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f est définie sur I par :	Une primitive F de f sur I est :
$f = u' \times u$	$F = \frac{1}{2} u^2$
$f = \frac{u'}{u^2}$ (u ne s'annulant pas sur I)	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ ($u(x) > 0$ sur I)	$F = 2\sqrt{u}$
$f = u' \times u^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	$F = \frac{1}{\alpha + 1} u^{\alpha+1}$
$f = \frac{u'}{u}$ (u ne s'annulant pas sur I)	$F = \ln(u)$
$f = u' e^u$	$F = e^u$

En particulier : $e^{\lambda x} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$ (si $\lambda \neq 0$)

Exemples :

Primitive de $f(x) = (2x - 1)^3$: Si on pose $u(x) = 2x - 1$ alors $u'(x) = 2$.

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (2x - 1)^3 = \frac{1}{2} u'(x) \times u(x)^3$$

Donc $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (2x - 1)^4 = \frac{1}{8} (2x - 1)^4$

Primitive de $g(x) = \frac{3}{5 - 4x}$ sur $] \frac{5}{4}; +\infty[$: si on pose $u(x) = 5 - 4x$ alors $u'(x) = -4$.

$$g(x) = 3 \times -\frac{1}{4} \times \frac{-4}{5 - 4x} \quad G(x) = -\frac{3}{4} \ln(|5 - 4x|) = -\frac{3}{4} \ln(4x - 5) \quad (\text{car } 5 - 4x < 0 \text{ sur }] \frac{5}{4}; +\infty[$$

1.2. Intégrale sur un segment

Propriété - Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a, b des éléments de I .

Soit F une primitive de f sur I . Alors le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de F . Il est appelé intégrale de a à b de f .

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple : Calculer $I = \int_0^2 (3 + e^{-2x}) dx$

$$I = \left[3x - \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^2 = 6 - \frac{e^{-4}}{2} - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{2} - \frac{e^{-4}}{2}.$$

Remarque : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda dx = [\lambda x]_a^b = \lambda(b - a)$ ("aire du rectangle")

1.3 Propriétés de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$.

Alors $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \text{ (relation de Chasles)}$$

Propriété : Linéarité de l'intégrale.

Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a, b \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Remarque :

_ Attention, $\int_a^b f(t)g(t)dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt$!!

Remarque : **Intégrale d'une fonction "continue par morceaux"**

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; c]$ et $b \in [a; c]$ (on a donc $a \leq b \leq c$).

On suppose que f est continue sur $[a; b[$ et sur $]b; c]$. On suppose de plus et que f admet une limite finie à gauche et à droite en b (donc f est prolongeable par continuité sur $[a; b]$ et sur $[b; c]$).

On peut alors définir $\int_a^c f(x)dx$ par : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Exemple :

Soit f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

f est continue sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$ et admet des limites finies à gauche et à droite en 0.

On peut donc définir $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$. Déterminer la valeur de I .

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 0dx + \int_0^1 (x^2 + 1)dx = 0 + \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

2. Calculs d'intégrales

2.1 Intégrations par parties

Théorème :

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I .

Pour tous réels a et b de I , on a : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Remarques :

_ L'intégration par parties permet de calculer l'intégrale d'un produit.

_ $\begin{matrix} \text{polynôme} \times \exp & & \text{polynôme} \times \ln \\ u & v' & v' & u \end{matrix}$

_ astuce : $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.

_ pour des suites d'intégrales, cela permet souvent de trouver une **relation de récurrence**.

Exemples :

1) Valeur de $I = \int_0^1 (2x - 3)e^{2x}dx$?

Posons $u = 2x - 3$ $v'(x) = e^{2x}$ $u' = 2$ $v = \frac{e^{2x}}{2}$ u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x - 3)e^{2x} &= \left[\frac{(2x - 3)e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2e^{2x}}{2} dx = -\frac{e^2}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) - \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = 2 - e^2 \end{aligned}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} .

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$. Ipp : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$ u et v sont de classe C^1

$$I_{n+1} = [x^{n+1}e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx = e - 0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx = e - (n+1)I_n.$$

2.2 Changement de variables

Rappel : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est notée f' ou $\frac{df}{dx}$.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Soit g une fonction de classe C^1 sur un intervalle J et bijective de J sur I .

Alors $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{y=g^{-1}(a)}^{y=g^{-1}(b)} f(g(y)) \times g'(y) dy$

Méthode : On donne $x = g(y)$, où g est bijective (ou $y = g^{-1}(x)$)

_ on détermine $y = g^{-1}(x)$ (ou $x = g(y)$) et on remplace dans l'expression x par $g(y)$

_ Notation : $x = g(y)$ on dérive par rapport à y : $\frac{dx}{dy} = g'(y)$ d'où la notation : $dx = g'(y)dy$

_ on modifie les bornes : pour $x = a$ $y = g^{-1}(a)$ pour $x = b$ $y = g^{-1}(b)$

Remarque :

Un changement de variable affine (du type $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$) est toujours bijectif et de classe C^1 .

Attention, il n'est pas forcément donné dans l'énoncé.

Exemple :

Soit $I = \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t+1}$, déterminer la valeur de I .

$\varphi(t) = \sqrt{t+1}$ est de classe C^1 sur $[0;3]$

$$u^2 = t + 1 \Leftrightarrow t = u^2 - 1$$

$$\frac{dt}{du} = 2u \quad "dt = 2u du"$$

$$t = 0 \Leftrightarrow u = 1 \quad t = 3 \Leftrightarrow u = 2$$

$$\text{Donc } I = \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} 2u du = \int_1^2 (2u^2 - 2) du = \left[\frac{2u^3}{3} - 2u \right]_1^2 = \frac{16}{3} - 4 - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}.$$

3. Intégrales et ordre

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, **avec $a \leq b$**

- _ Si $\forall x \in [a; b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (positivité de l'intégrale)
- _ Si $\forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (croissance de l'intégrale)
- _ S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$,
alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$. (inégalité de la moyenne)
- _ $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Remarques :

- _ Attention, dans toutes ces propriétés, il faut que $a \leq b$!
- _ pour montrer une inégalité sur une intégrale, on trouve d'abord une inégalité sur la fonction à intégrer sur l'intervalle d'intégration (soit avec une constante, soit avec une fonction qu'on sait intégrer), puis on utilise un des théorèmes sur l'ordre.
- _ attention à faire apparaître " $\forall x \in [a; b]$ "

Exemples :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\forall x \in [0; 1], x^n \geq 0, e^{-x} \geq 0$ donc $x^n e^{-x} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

$\forall x \in [0; 1], -x \leq 0, e^{-x} \leq 1, x^n e^{-x} \leq x^n$ (car $x^n \geq 0$).

Par croissance de l'intégrale $\int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.

$$\forall x \in [k; k+1], k \leq x \leq k+1 \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

Donc, d'après l'inégalité de la moyenne : $\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k+1} \leq [\ln(x)]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k} \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$).

Si f est **continue et positive** sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f(x) = 0 \forall x \in [a; b]$. (f est identiquement nulle sur le segment).

Remarque :

_ si f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[a; b]$, on a donc $\int_a^b f(x)dx > 0$.

_ Attention, si f n'est pas positive, il se peut que $\int_a^b f(x)dx = 0$ sans que $f(x) = 0 \forall x \in [a; b]$.

Ex : $\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. alors que $f(x) = x$ n'est pas la fonction nulle.

4. Intégrales et parité

Propriété :

Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[-a; a]$.

Si f est **paire** sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Si f est **impaire** sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Courbe :

Démonstration :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

Changement de variables dans la première intégrale : on pose $u = -x$ donc $x = -u$ $dx = -du$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du$$

Si f est paire, $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$ donc $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(t)dt$

Si f est impaire, $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a -f(u)du = - \int_0^a f(u)du$ donc $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Remarque :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

Si f est paire, alors $x \mapsto xf(x)$ est impaire et $x \mapsto x^2f(x)$ est paire.

Si f est impaire alors $x \mapsto xf(x)$ est paire et $x \mapsto x^2f(x)$ est impaire.

Ex : Soit $f(x) = \exp(|x|)$ sur $[-1;1]$.

Calculer $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ $J = \int_{-1}^1 x.f(x)dx$

$\forall x \in [-1;1] f(-x) = \exp(|-x|) = \exp(|x|) = f(x)$ donc f est paire.

Donc $I = 2 \int_0^1 f(x)dx = 2 \int_0^1 e^x dx = 2 [e^x]_0^1 = 2(e - 1)$

f est paire donc g est impaire donc $J = 0$.

5. Fonction définie par une intégrale

Propriété :

Soit g une fonction **continue** sur un intervalle I et $a \in I$.

Soit f la fonction définie par sur I par : $\forall x \in I, f(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Alors **f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = g(x)$ sur I .**

(f est la primitive de g qui s'annule en a .)

Démonstration :

si G est une primitive de g sur I , $f(x) = \int_a^x g(t)dt = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a)$.

G est dérivable sur I , donc f aussi et $\forall x \in I f'(x) = G'(x) = g(x)$ (car G primitive de g).

de plus $f(a) = \int_a^a g(t)dt = 0$.

Si h est une autre primitive de g qui s'annule en a : alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = f + \lambda$.

Donc $h(a) = f(a) + \lambda = 0 = 0 + \lambda$ donc $\lambda = 0$ donc $h = f$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer l'expression de f' .

Pour $t > 0$, on pose $g(t) = \frac{e^t}{t}$. g est continue sur $]0; +\infty[$ (comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas).

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x}$.

Cas général (Méthode à connaître et à refaire à chaque fois) :

Soit g une fonction continue sur un intervalle J et u, v deux fonctions dérivables d'un intervalle I sur J .
On pose : $\forall x \in I, f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t) dt$.

g est continue sur J , donc admet une primitive G .

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t) dt = [G(t)]_{u(x)}^{v(x)} = G(v(x)) - G(u(x)).$$

u, v et G sont dérivables, donc f est dérivable sur I , comme différence de composées de fonctions dérivables et $\forall x \in I, f'(x) = v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x))$
 $= v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_{2x}^{2x+1} e^{-t^2} dt$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $g(t) = e^{-t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive G .

$$\text{Alors } f(x) = [G(t)]_{2x}^{2x+1} = G(2x+1) - G(2x)$$

G est de classe C^1 (car $G' = g$ continue) donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme différence de composées de fonctions de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2G'(2x+1) - 2G'(2x) = 2g(2x+1) - 2g(2x) = 2e^{-(2x+1)^2} - 2e^{-(2x)^2}$$

Remarques :

_ attention dans les inégalités : on n'a pas toujours $u(x) \leq v(x)$

_ Pour étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale (de variable d'intégration t), il est souvent utile de faire le **changement de variable $u = -t$** .

Ex :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Etudier la parité de f .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt. \text{ Changement de variable : } u = -t \Leftrightarrow t = -u \text{ donc } \frac{dt}{du} = -1 \text{ "dt = - du"}$$

$$t = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad t = -x \Leftrightarrow u = x.$$

$$\text{Donc } f(x) = \int_0^x e^{-(-u)^2} (-du) = - \int_0^x e^{-u^2} du = -f(x). \text{ Donc } f \text{ est impaire.}$$