Chapitre 11 : Intégration sur un segment

1. Primitives et intégrales

Rappels : $\forall$ x > 0,

$x^{1/2} =$ $x^{3/2} =$ $x^{-1/2} =$ $x^{-1} =$

1.1 Primitives d'une fonction continue

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable sur I** et telle que **F' = f**.

Propriété :

Si f est une fonction **continue sur un intervalle I**, alors f admet des primitives sur I.
Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \longmapsto F(x) + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Primitives des fonctions usuelles :

Si f(x) =	Une primitive F de f est :	sur
$f(x) = 1$		
$f(x) = x$		
$f(x) = \frac{1}{x^2}$		
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$		
$f(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = e^x$		
$f(x) = \ln(x)$		

Ex : primitives de $f(x) = \frac{1}{x^4}$:

Propriété :

Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit U une primitive de u sur I et V une primitive de v sur I. Alors :
_ U + V est une primitive de u + v sur I
_ λU est une primitive de λu sur I.

Attention UV n'est pas une primitive de uv !

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f est définie sur I par :	Une primitive F de f sur I est :
$f = u' \times u$	
$f = \frac{u'}{u^2}$ (u ne s'annulant pas sur I)	
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ ($u(x) > 0$ sur I)	
$f = u' \times u^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$	
$f = \frac{u'}{u}$ (u ne s'annulant pas sur I)	
$f = u'e^{u}$	

En particulier : $\mathbf{e^{\lambda x} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}}$ (si $\lambda \neq 0$)

Exemples :
Primitive de $f(x) = (2x - 1)^3$:

Primitive de $g(x) = \frac{3}{5 - 4x}$ sur $]\frac{5}{4}; +\infty[$:

1.2. Intégrale sur un segment

Propriété - Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b des éléments de I.
Soit F une primitive de f sur I. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de F. Il est appelé intégrale de a à b de f.

$$\mathbf{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

Exemple : Calculer $I = \int_0^2 (3 + e^{-2x})dx$

Remarque : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \boldsymbol{\lambda} \mathbf{dx} = [\lambda x]_a^b = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{(b - a)}$ ("aire du rectangle")

1.3 Propriétés de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c $\in$ I.
Alors $\displaystyle \int_b^a \mathbf{f(x)dx = -} \int_a^b \mathbf{f(x)dx}$

$\displaystyle \int_a^b \mathbf{f(x)dx} + \int_b^c \mathbf{f(x)dx} = \int_a^c \mathbf{f(x)dx}$. (relation de Chasles)

Propriété : Linéarité de l'intégrale.

Soit f,g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b $\in$ I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\displaystyle \int_a^b \mathbf{(f(x) + g(x))dx} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx} + \int_a^b \mathbf{g(x)dx}$

$\displaystyle \int_a^b \mathbf{(\lambda f(x))dx} = \lambda \int_a^b \mathbf{f(x)dx}$

Remarque :
_ Attention, $\int_a^b f(t)g(t)dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt$!!

Remarque : **Intégrale d'une fonction "continue par morceaux"**
Soit f une fonction définie sur un intervalle [a; c] et b $\in$ [a; c] (on a donc $a \leq b \leq c$).
On suppose que f est continue sur [a; b[et sur]b; c]. On suppose de plus et que f admet une limite finie à gauche et à droite en b (donc f est prolongeable par continuité sur [a; b] et sur [b; c]).
On peut alors définir $\int_a^c f(x)dx$ par : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Exemple :
Soit f définie sur [-1;1] par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.
f est continue sur [-1;0[et sur]0;1] et admet des limites finies à gauche et à droite en 0.
On peut donc définir $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$. Déterminer la valeur de I.

2. Calculs d'intégrales

2.1 Intégrations par parties

Théorème :

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b de I, on a : $\displaystyle\int_a^b \mathbf{u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$

Remarques :
_ L'intégration par parties permet de calculer l'intégrale d'un produit.
_ polynôme × exp   polynôme × ln
    u   v'   v'   u
_ astuce : $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$.
_ pour des suites d'intégrales, cela permet souvent de trouver une **relation de récurrence**.

Exemples :
1) Calculer $I = \int_0^1 (2x-3)e^{2x}dx$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.

2.2 Changement de variables

Rappel : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est notée f ' ou $\frac{df}{dx}$.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle [a ;b] et telle que $\varphi([a,b]) \subset I$.
Alors :

$$\boldsymbol{\int_{t=a}^{t=b} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{u=\varphi(a)}^{u=\varphi(b)} f(u) \times du}$$

Méthode :
On donne $u = \varphi(t)$ où φ est de classe C^1
_ Notation : on dérive par rapport à t : $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$ d'où la notation : "$du = \varphi'(t)dt$"
Dans le cas où φ est bijective, on exprime t en fonction de u (sous la forme $t = \varphi^{-1}(u)$), puis on dérive cette relation pour obtenir directement "dt" en fonction de "du".
_ on modifie les bornes : pour $t = a$ $u = \varphi(a)$ pour $t = b$ $u = \varphi(b)$

Remarque :
Un changement de variable affine (du type $u = at + b$, $a \neq 0$) est toujours de classe C^1. Attention, il n'est pas forcément donné dans l'énoncé.

Exemple :
Soit $I = \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t+1}$, déterminer la valeur de I.

3. Intégrales et ordre

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sue [a;b], **<u>avec a ≤ b</u>**

_ Si **$\forall x \in [a;b], f(x) \geq 0$** alors **$\int_a^b f(x)dx \geq 0$** (positivité de l'intégrale)

_ Si **$\forall x \in [a\,;b], f(x) \leq g(x)$**, alors **$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$** (croissance de l'intégrale)

_ S'il existe deux réels m et M tels que : **$\forall x \in [a\,;b], m \leq f(x) \leq M$**,
alors **$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$**. (inégalité de la moyenne)

_ **$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$**

Remarques :
_ Attention, dans toutes ces propriétés, il faut que a ≤ b !
_ pour montrer une inégalité sur une intégrale, on trouve d'abord une inégalité sur la fonction à intégrer sur <u>l'intervalle d'intégration</u> (soit avec une constante, soit avec une fonction qu'on sait intégrer), puis on utilise un des théorèmes sur l'ordre.
_ attention à faire apparaitre "$\forall x \in [a;b]$"

Exemples :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{dx}{x} \leq \dfrac{1}{k}$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b] (a < b).
Si f est **continue et positive sur [a;b]** et si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors **f(x) = 0** $\forall$ **x** $\in$ **[a;b]**. (f est identiquement nulle sur le segment).

Remarque :
_ si f est continue, positive et non identiquement nulle sur [a;b], on a donc $\int_a^b f(x)dx > 0$.
_ Attention, si f n'est pas positive, il se peut que $\int_a^b f(x)dx = 0$ sans que $f(x) = 0 \ \forall x \in [a;b]$.
Ex : $\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. alors que f(x) = x n'est pas la fonction nulle.

4. Intégrales et parité

Propriété :

Soit a > 0 et f une fonction continue sur l'intervalle [-a;a].
Si f est **paire** sur [-a;a], alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
Si f est **impaire** sur [-a;a], alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Courbe :

Démonstration :
$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$
Changement de variables dans la première intégrale : on pose u = - x   donc x = -u   dx = - du
$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du$
Si f est paire, $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$ donc $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(t)dt$
Si f est impaire, $\int_0^a f(-u)du = \int_0^a -f(u)du = -\int_0^a f(u)du$ donc $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Remarque :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.
Si f est paire, alors $x \longmapsto x.f(x)$ est impaire et $x \longmapsto x^2 f(x)$ est paire.
Si f est impaire alors $x \longmapsto x.f(x)$ est paire et $x \longmapsto x^2 f(x)$ est impaire.

Ex : Soit $f(x) = \exp(|x|)$ sur $[-1;1]$.

Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ $J = \int_{-1}^{1} x.f(x)dx$

5. Fonction définie par une intégrale

Propriété :

Soit g une fonction **continue** sur un intervalle I et $a \in I$.
Soit f la fonction définie par sur I par : $\forall x \in I$, $\mathbf{f(x) = \int_a^x g(t)dt}$.

Alors **f est dérivable sur I et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$**.
(f est la primitive de g qui s'annule en a.)

Démonstration :

si G est une primitive de g sur I, $f(x) = \int_a^x g(t)dt = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a)$.

G est dérivable sur I, donc f aussi et $\forall x \in I$ $f'(x) = G'(x) = g(x)$ (car G primitive de g).
de plus $f(a) = \int_a^a g(t)dt = 0$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer l'expression de f ' .

Cas général (Méthode à connaitre et à refaire à chaque fois) :

Soit g une fonction continue sur un intervalle J et u, v deux fonctions dérivables d'un intervalle I sur J.
On pose : $\forall x \in I$, $\mathbf{f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt}$.

g est continue sur J, donc admet une primitive G.
Alors $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt = [G(t)]_{u(x)}^{v(x)} = G(v(x)) - G(u(x))$.

u, v et G sont dérivables, donc f est dérivable sur I, comme différence de composées de fonctions dérivables et $\forall x \in I$, $f'(x) = v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x))$
$= v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_{2x}^{2x+1} e^{-t^2}dt$.
Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarques :
_ attention dans les inégalités : on n'a pas toujours $u(x) \leq v(x)$
_ Pour étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale (de variable d'intégration t), il est souvent utile de faire le **changement de variable u = -t**.

Ex :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. Etudier la parité de f.