Chapitre 12 : Intégrales impropres

1. Intégrales convergentes

1.1 Intégrale sur $[a; +\infty[$

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
Si l'intégrale $\int_a^X f(x)dx$ **a une limite finie quand X tend vers + ∞**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et on note $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty}\left(\int_a^X f(x)dx\right)}$.

Remarques :
_ il faut donc calculer $I(X) = \int_a^X f(x)dx$ pour $X \geq a$, puis trouver la limite de cette expression lorsque X tend vers $+\infty$.
_ Comme pour le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, le symbole $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'a un sens que lorsqu'on a montré la convergence de l'intégrale.
_ attention, la recherche d'une primitive ne peut se faire que sur un segment.
_ pour tout réel a, $\int_a^{+\infty} 0dx$ converge et vaut 0.

Ex : Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

La fonction $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Soit $X \geq 0$ $\quad I(X) = \int_0^X \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^X = -\frac{1}{X+1} + 1$

$\lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{X+1} + 1 = 1$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = 1$.

Propriété :

(Critère de Riemann) TRES IMPORTANT
Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx}$ converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha > 1}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'intégrale $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} dx}$ converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha > 0}$.

Remarque : Attention, il faut que $a > 0$ pour que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge !

Exemples :
_ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ $\quad 2 > 1$ donc l'intégrale est convergente
_ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$ $\quad \frac{1}{2} < 1$ l'intégrale est divergente.

1.2 Intégrale sur]- ∞;b]

Définition :

Soit $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle] - ∞;b].
Si l'intégrale $\int_X^b f(x)dx$ a une limite finie quand X tend vers - ∞, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ est convergente et on note $\boldsymbol{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{X \to -\infty}\left(\int_X^b f(x)dx\right)}$.

Exemple : Nature et valeur de $\int_{-\infty}^0 e^x dx$?

La fonction est continue sur]- ∞;0]. Soit $X \leq 0$. $\int_X^0 e^x dx = [e^x]_X^0 = 1 - e^X$. $\lim_{X \to -\infty} 1 - e^X = 1$.

Donc l'intégrale est convergente et $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$

Remarque : $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^b 0dx$ converge et vaut 0.

Propriété : (Critère de Riemann)

Soit $a < 0$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Intégrale sur] - ∞; + ∞[

Définition :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Si les intégrales $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont convergentes, on dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et dans ce cas : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$

Remarques :

_ il faut donc montrer la convergence séparément en + ∞ et en – ∞.
_ le choix du réel a est libre : il faut donc le choisir intelligemment.
_ Attention à ne pas écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ avant d'avoir montré la convergence !
_ comme pour l'intégrale sur un segment, la définition peut s'étendre aux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, en lesquels la fonction admet une limite finie à gauche et à droite.

Exemples :

1) Convergence et valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-x2}dx$?

_ Convergence de $\int_{0}^{+\infty} x.e^{-x2}dx$?

si $X \geq 0$, $\int_0^X xe^{-x2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x2}\right]_0^X = -\frac{1}{2}e^{-X^2} + \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{1}{2}e^{-X^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} x.e^{-x2}dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

De même, si $X \leq 0$, $\int_X^0 xe^{-x2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x2}\right]_X^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-X^2}$

$\lim\limits_{X \to -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-X^2} = -\frac{1}{2}$ donc $\int_{-\infty}^0 xe^{-x2}dx$ converge et vaut $-\frac{1}{2}$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x2}dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x2}dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x2}dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

On voit que f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 1, avec $\lim\limits_{x \to 1} 0 = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{x^3} = 2$.

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Sur $]-\infty,1[$, f est nulle, donc $\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$ converge et vaut 0

Sur $[1;+\infty[$ $f(x) = \frac{2}{x^3}$ $3 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Si $X \geq 1$, $\int_1^X f(x)dx = \int_1^X 2x^{-3}dx = \left[\frac{2x^{-2}}{-2}\right]_1^X = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^X = -\frac{1}{X^2} + 1$

Donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_1^X f(x)dx = 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut $0 + 1 = 1$.

Remarque :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

S'il existe un intervalle I tel que $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \neq 0 \\ \forall x \notin I, f(x) = 0 \end{cases}$, on dit que **f est à support sur I**.

On a alors : $\int_{-\infty}^{+\infty}$ **f(x)dx converge si et seulement si** $\int_I$ **f(x)dx converge**.

Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_I f(x)dx$.

Ex : Dans l'exemple précédent, f est à support sur $[1; +\infty[$.

Comme $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et est égale à $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

2. Propriétés des intégrales convergentes

2.1 Linéarité / Relation de Chasles

Propriété (Linéarité de l'intégrale) :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; +\infty[$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
_ Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ converge et :
$\boldsymbol{\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx}$
_ si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx$ converge et : $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)dx}$
(propriété analogue sur $]-\infty;b]$ et $]-\infty; +\infty[$)

Propriété (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$. Soit $b \geq a$.
Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ converge.
Dans ce cas : $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx}$. (analogue sur les autres intervalles)

2.2 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge.
On peut alors définir la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Pour déterminer l'expression de F :
Dans le cas où f est définie par intervalles, il faut étudier séparément quand x appartient à chacun de ces intervalles, et "découper" le chemin de $-\infty$ à x.

Remarque : **"le chemin de - ∞ à x" doit toujours partir de "- ∞" et arriver à "x" !**

Exemple : Soit f suite de l'exemple précédent :
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Déterminer l'expression de F. (schéma)
_ si $x < 1$, $f(t) = 0$ sur $]-\infty;x]$ donc $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
_ si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_1^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_1^{x} \frac{2}{t^2}dt = 0 + 1 - \frac{1}{x^2}$

Conclusion : $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

2.3 Intégration par parties / Changements de variables

Attention, comme pour une recherche de primitive, une intégration par parties ne peut s'effectuer **que sur un segment**, et non sur un intervalle ouvert.
Par exemple, pour une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, on effectuera l'intégration par parties sur $\int_a^X f(x)dx$, et on passera à la limite.
_ Attention à ne pas écrire d'égalité entre $\int_a^X f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Remarque :
Seuls les changements de variables affines sont autorisés sur un intervalle ouvert. Pour les autres, il faut effectuer le changement de variables sur le segment, et passer à la limite.

Exemples :
1) Montrer que $I = \int_1^{+\infty} xe^{-2x}dx$ est convergente. Calculer sa valeur.
Soit $X \geq 1$. Calculons $I(X) = \int_1^X xe^{-2x}dx$

Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

Donc $I(X) = \left[-\dfrac{xe^{-2x}}{2}\right]_1^X - \int_1^X -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\,dx$

$= -\dfrac{Xe^{-2X}}{2} + \dfrac{e^{-2}}{2} + \left[-\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]_1^X = -\dfrac{Xe^{-2X}}{2} - \dfrac{e^{-2X}}{4} + \dfrac{3}{4}e^{-2}$.

$\lim\limits_{X \to +\infty} -Xe^{-2X} = 0$ (croissances comparées) $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^{-2X}}{4} = 0$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} I(X) = \dfrac{3}{4}e^{-2}$.

Donc l'intégrale est convergente et vaut $\dfrac{3}{4}e^{-2}$.

2) (TRES CLASSIQUE)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$. On admet que cette intégrale converge.
a) Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.
b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

a) Soit $X \geq 0$ $I_{n+1}(X) = \int_0^X x^{n+1}e^{-x}$ IPP : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I_{n+1}(X) = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^X - \int_0^X -(n+1)x^n e^{-x}dx$

$I_{n+1}(X) = -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)\int_0^X x^n e^{-x}dx$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -X^{n+1}e^{-X} = 0$ (croissances comparées) $\lim\limits_{X \to +\infty} I_{n+1}(X) = I_{n+1}$ $\lim\limits_{X \to +\infty} I_n(X) = I_n$

Donc par passage à la limite : $I_{n+1} = (n+1)I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
b) $I_1 = 1 \times I_0$ $I_2 = 2\, I_1 = 2 \times 1 \times I_0$ $I_3 = 3I_2 = 3 \times 2 \times 1 \times I_1$….
Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!\, I_0$
Par récurrence : _ pour n = 0 : $0!I_0 = 1\, I_0 = I_0$
_ supposons que $I_n = n!\, I_0$ alors $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n!I_0 = (n+1)!I_0$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!I_0$

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ Soit $X \geq 0$ $\int_0^X e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^X = -e^{-X} + 1$ $\lim\limits_{X \to +\infty} -e^{-X} + 1 = 1$ donc $I_0 = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$

2.4 Convergence et parité

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Si f est paire ou impaire $\int_{-\infty}^{+\infty}$ **f(x)dx converge si et seulement si** $\int_0^{+\infty}$ **f(x)dx converge**.

Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ si f est paire} \\ 0 \text{ si f est impaire} \end{cases}$

Remarque : même si f est impaire, il faut que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$!

Exemples :

1) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|x|)dx$ converge et calculer sa valeur.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-|-x|} = e^{-|x|}$ f est paire.

$\int_0^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ on a vu que cette intégrale converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|x|)dx$ converge et vaut 2.

2) Attention, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = x est impaire, mais on ne peut pas dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} x.dx = 0$ car $\int_0^{+\infty} xdx$ ne converge pas !

2.5 Convergence absolue

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$.
Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ **est convergente**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **absolument convergente**.
(définition analogue sur $]-\infty;b]$, $]-\infty; +\infty[$)

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$.
Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est **absolument convergente**, alors elle est **convergente**.

(propriété analogue sur $]-\infty;b]$, $]-\infty; +\infty[$)

3. Intégrale d'une fonction positive

Propriété (Positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$.
Si $\forall x \in [a; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ et si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$.

(propriété analogue sur $]-\infty;b]$ et sur $]-\infty; +\infty[$).

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; +\infty[$.
On suppose que $\forall$ **x $\in$ [a; + ∞[f(x) ≥ 0 et g(x) ≥ 0**.
1) si $\forall x \in [a; +\infty[$, **$f(x) \leq g(x)$**
_ si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente
et $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$
_ si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente.
2) si **$f(x) =_{+\infty} o(g(x))$**
_ si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
_ si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente.
3) si **$f(x) \sim_{+\infty} g(x)$**
$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente.

Remarques :
_ N'oubliez pas de montrer la positivité des fonctions !
_ Pour montrer la convergence d'une intégrale, on peut donc :
_ chercher un équivalent plus simple
_ montrer qu'elle est négligeable devant une fonction intégrable (par exemple : $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$)

Exemples :
1) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+2} dx$ convergente ? $\frac{x-1}{x^2+2} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$

Les fonctions sont continues et positives et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est divergente donc $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+2} dx$ aussi.

2) $\int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx$ convergente ?

$xe^{-x} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$? $\frac{xe^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = x^3e^{-x}$ $\lim_{x \to +\infty} x^3e^{-x} = 0$ (croissances comparées) donc $xe^{-x} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Les fonctions sont continues et positives et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx$ aussi.