

Feuille n°1

Exercice 1

$$1) \int_{x/2}^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x/2} f(t)dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x/2} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t)dt = 0.$$

$$2) a) \forall t \in [x/2; x], \frac{x}{2} \leq t \leq x \text{ donc } f(x) \leq f(t) \leq f\left(\frac{x}{2}\right) \text{ (f décroissante)}$$

$$\text{Par croissance de l'intégrale : } \int_{x/2}^x f(x)dt \leq \int_{x/2}^x f(t)dt \quad \frac{xf(x)}{2} \leq \int_{x/2}^x f(t)dt$$

$$xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t)dt \quad \text{comme f est positive } 0 \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t)dt$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t)dt = 0 \text{ donc par encadrement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 0 \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3) x.f(x) = \frac{x}{(2+x)\ln(2+x)} \sim_{+\infty} \frac{x}{x.\ln(2+x)} \sim_{+\infty} \frac{1}{\ln(2+x)} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x.f(x) = 0. \text{ Donc } f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$f \text{ est continue sur } [0; +\infty[\text{ et } \forall X \geq 0, \int_0^X f(x)dx = \int_0^X \frac{1}{\ln(2+x)} dx = [\ln(\ln(2+x))]_0^X = \ln(\ln(2+X)) - \ln(\ln(2))$$

donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(x)dx = +\infty$. L'intégrale diverge.

Exercice 2

$$1) \text{ La fonction } f(t) = e^{-t^{x-1}} \text{ est continue et positive sur } [0; +\infty[. (x \geq 1 \text{ donc } x-1 \geq 0)$$

$$\text{En } +\infty : t^2 f(t) = t^{x+1} e^{-t} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0 \text{ (c.c.) donc } f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ converge. Donc } \Gamma(x) \text{ existe pour tout } x \geq 1.$$

$$2. a) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \quad \int_0^X e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^X = 1 - e^{-X} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} 1 - e^{-X} = 1 \text{ donc } \Gamma(1) = 1.$$

$$b) \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \quad \text{Soit } X \geq 0. I(X) = \int_0^X e^{-t} t^x dt$$

$$\text{Ipp : } u(t) = t^x \quad v'(t) = e^{-t} \quad u'(t) = x t^{x-1} \quad v(t) = -e^{-t}$$

$$I(X) = [-t^x e^{-t}]_0^X + \int_0^X x t^{x-1} e^{-t} dt = -X^x e^{-X} + x \int_0^X t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -X^x e^{-X} = 0 \text{ (c.c.) } \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x). \text{ Donc } \Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

$$c) \Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2 \quad \Gamma(4) = 3 \times \Gamma(3) = 3 \times 2$$

$$\Gamma(5) = 5 \times 4 \times 3 \quad \text{Conjecture : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\text{Par récurrence : } _ \text{ pour } n=1 : \Gamma(1) = 1 \quad (1-1)! = 0! = 1 \text{ donc vrai}$$

$$_ \text{ supposons } \Gamma(n) = (n-1)! \text{ alors } \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$3. a) \text{ On pose } g(x) = e^x - 1 - x \quad g'(x) = e^x - 1 \quad e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)		0	

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0 \quad e^x \geq 1 + x. \quad (\text{ou convexité de la fonction exp})$$

b) Avec $x = -\frac{t}{n} : 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n}$ donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq (e^{-t/n})^n = e^{-t}$

c) Sur $[0; n]$ $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{-t^{x-1}} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t^{x-1}}$ puis par croissance de l'intégrale

d) On a donc : $\int_0^n e^{-t^{x-1}} dt - \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t^{x+2-1}} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t^{x-1}} dt$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t^{x-1}} dt = \Gamma(x) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t^{x+2-1}} dt = \Gamma(x+2) \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t^{x+2-1}} dt.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$.

e) Posons $u = \frac{t}{n} \Leftrightarrow t = nu$ donc $dt = n du$

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$$

4. a) Par récurrence : pour $n = 0$

$$- \int_0^1 (1-t)^0 t^{x-1} dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_0^1 = \frac{1}{x} \quad \frac{0!}{x} = \frac{1}{x} \text{ donc vrai}$$

$$\text{-- supposons que : } \forall x > 0, \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$\int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1} dt = ? \quad \text{Ipp : } u(t) = (1-t)^{n+1} \quad v'(t) = t^{x-1} \quad u'(t) = -(n+1)(1-t)^n \quad v(t) = \frac{t^x}{x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1} dt &= \left[\frac{t^x}{x} (1-t)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)(1-t)^n \frac{t^x}{x} dt \\ &= \frac{n+1}{x} \times \int_0^1 (1-t)^n t^{(x+1)-1} dt \\ &= \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n+1)} \quad (\text{hyp de rec avec } x+1) \\ &= \frac{(n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n+1)} \text{ donc la prop est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) évident avec questions précédentes.

Feuille n°2

Exercice 1

$$1) \text{ a) Soit } X \geq n. \int_n^X \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = [-e^{1/x}]_n^X = -e^{1/X} + e^{1/n}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{1/X} = 1 \text{ donc } I_n \text{ converge et est égale à } e^{1/n} - 1.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } I_n = e^{1/n} - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

$$2. \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{1/k} = 1 \text{ donc } e^{1/k} \sim_{+\infty} 1 \quad \frac{e^{1/k}}{k^2} \sim \frac{1}{k^2}. \text{ Par comparaison de séries à termes positifs, on a donc la série}$$

$$\sum_{k \geq 0} u_k \text{ converge.}$$

$$b) f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ et } \forall x > 0, f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x} \cdot x^2 - e^{1/x} \cdot 2x}{x^4} = \frac{(-1-2x)e^{1/x}}{x^4} < 0$$

$\forall k \geq 1, f$ est décroissante sur $[k; k+1]$ donc $\forall t \in [k; k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

Donc par inégalité de la moyenne, $(k+1-k)f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq (k+1-k)f(k)$.

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq u_k.$$

b) Soit $N \geq n$. Par somme d'inégalité : $\sum_{k=n}^N u_{k+1} \leq \sum_{k=n}^N \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^N u_k$

En posant $k' = k+1$ dans la première somme et par relation de Chasles

$$\sum_{k'=n+1}^{N+1} u_{k'} \leq \int_n^{N+1} f(t)dt \leq u_n + \sum_{k=n+1}^N u_k$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{N+1} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_n^{N+1} f(t)dt = \int_n^{+\infty} f(x)dx = I_n \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

$$\text{Donc } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{1/n}}{n^2}.$$

$$\text{c) Posons } v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \forall n \geq 1, v_n \leq I_n \text{ et } I_n \leq v_n + \frac{e^{1/n}}{n^2} \Leftrightarrow I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2} \leq v_n$$

$$I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2} \leq v_n \leq I_n \quad I_n > 0 \text{ donc } 1 - \frac{e^{1/n}}{n^2 I_n} \leq \frac{v_n}{I_n} \leq 1$$

$$e^{1/n} \sim_{+\infty} 1 \quad n^2 I_n \sim n \text{ donc } \frac{e^{1/n}}{n^2 I_n} \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2 I_n} = 0$$

$$\text{Donc par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{I_n} = 1 \text{ donc } v_n \sim_{+\infty} I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$$

Exercice 2

Soit $x > 0$ et $X \geq x$. Notons $I(X) = \int_x^X \exp(-t^2)dt = \int_x^X -\frac{1}{2t} (-2t \cdot \exp(-t^2))dt$

$$\text{Ipp : } \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2t} \\ v'(t) = -2t \cdot \exp(-t^2) \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{2t^2} \\ v(t) = \exp(-t^2) \end{cases} \quad u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1.$$

$$I(X) = \left[-\frac{\exp(-t^2)}{2t} \right]_x^X - \int_x^X \frac{1}{2t^2} \exp(-t^2)dt = -\frac{\exp(-X^2)}{2X} + \frac{\exp(-x^2)}{x} - \int_x^X \frac{1}{2t^2} \exp(-t^2)dt$$

Par comparaison avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, on montre facilement que ces intégrales convergent.

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-X^2)}{2X} = 0 \text{ par croissances comparées. Donc par passage à la limite, on a :}$$

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp(-t^2)dt$$

$$\forall t \geq x, t^2 \geq x^2 \quad 0 \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad 0 \leq \frac{1}{t^2} \exp(-t^2) \leq \frac{1}{x^2} \exp(-t^2)$$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp(-t^2)dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt$$

$$\text{L'intégrale est strictement positive, donc } 0 \leq \frac{\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp(-t^2)dt}{\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt} \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Donc par encadrement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp(-t^2)dt}{\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt} = 0 \text{ donc } \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp(-t^2)dt = o\left(\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt\right)$$

$$\text{Donc } \int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt \sim_{+\infty} \frac{\exp(-x^2)}{2x}$$