Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $[0; +\infty[$, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

- 1) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\int_{x/2}^x f(t)dt$.
- 2) On suppose de plus dans cette question que f est positive et décroissante .
- a) Montrer que $\forall x \geq 0, 0 \leq x.f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t)dt$

b) En déduire que $f(x) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{(2+x)\ln(2+x)}$.

Montrer que $f(x) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x}\right)$, mais que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Exercice 2 – La fonction Gamma

Soit Γ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $\forall x \geq 1, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1. Montrer que Γ est bien définie sur $[1; +\infty[$.
2. a) Déterminer $\Gamma(1)$.
- b) Montrer que $\forall x \geq 1, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.
- c) Conjecturer l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis le démontrer.
3. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;n], \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

On admet qu'on a également : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;n], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$

c) Montrer que : $\forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t^{x-1}} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t^{x-1}} dt$

d) En déduire que $\forall x \geq 1, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

e) En déduire que $\forall x \geq 1, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$

4. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1, \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

b) En déduire que $\forall x \geq 1, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.