Chapitre 12 : Intégrales impropres – Exercices niveau 2
Feuille n°2

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

1. a) Pour tout entier n non nul, montrer que l'intégrale $\int_n^{+\infty} f(x)dx$, notée I_n , converge et exprimer I_n en fonction de n .

b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la série de terme général $u_k = f(k)$ converge.

3. a) Etablir que, pour tout entier $k \geq 1$, on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{1/n}}{n^2}$.

c) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 – Oral HEC 2023

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt \sim_{+\infty} \frac{\exp(-x^2)}{2x}$.