Chapitre 12 : Intégrales impropres – Feuille n°1

Exercice 1
Pour les intégrales suivantes, étudier la nature de l'intégrale, et si elles convergent, calculer leur valeur.
a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+2}dx$ d) $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx$ e) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$.

Exercice 2
Soit une fonction f continue sur $[0; +\infty[$ et telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} f(t)dt$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{2x} f(t)dt$

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \frac{24}{x^4} \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$
1) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur.
2) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ est-elle convergente ? Si oui, calculer sa valeur.
3) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx$ est-elle convergente ? Si oui, calculer sa valeur.
4) Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction F par : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
Exprimer F(x) en fonction de x.

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} \text{ si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } -1 < x < 1 \end{cases}$
1) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction F par : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Exprimer F(x) en fonction de x.
3) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ est-elle convergente ?

Exercice 5 Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-2x}dx$. On admet que cette intégrale est convergente.
1) Déterminer I_0.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$.
4) En plus : On a montré comme exemple du cours que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$
A l'aide de cette égalité, retrouver la valeur de I_n.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$
Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur.