Chapitre 12 : Intégrales impropres – Feuille n°2

Exercice 1
Etudier la nature de ces intégrales (on ne demande pas leur valeur).

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+2}dt$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+2)^2}dt$ c) $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x^3e^{-x}$.
1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2f(x)$.
2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Exercice 3
Pour les exercices 6 puis 5 de la feuille 1, montrer que les intégrales convergent (sans les calculer).

Exercice 4
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n.\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 2^p\, p!$
4) On admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
5) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de l'intégrale $J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n.\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ et donner sa valeur.