Chapitre 12 : Intégrales impropres

1. Intégrales convergentes

1.1 Intégrale sur $[a; +\infty[$

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

Si l'intégrale $\int_a^X f(x)dx$ a une limite finie quand X tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et on note $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\int_a^X f(x)dx \right)$.

Remarques :

_ il faut donc calculer $I(X) = \int_a^X f(x)dx$ pour $X \geq a$, puis trouver la limite de cette expression lorsque X tend vers $+\infty$.

_ Comme pour le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, le symbole $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'a un sens que lorsqu'on a montré la convergence de l'intégrale.

_ attention, la recherche d'une primitive ne peut se faire que sur un segment.

_ pour tout réel a , $\int_a^{+\infty} 0dx$ converge et vaut 0.

Ex : Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Propriété :

(Critère de Riemann) TRES IMPORTANT

Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Remarque : Attention, il faut que $a > 0$ pour que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge !

Exemples :

$$- \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$- \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

1.2 Intégrale sur $]-\infty; b]$

Définition :

Soit $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty; b]$.Si l'intégrale $\int_X^b f(x)dx$ a une limite finie quand X tend vers $-\infty$, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ est convergente et on note $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\int_X^b f(x)dx \right)$.Exemple : Nature et valeur de $\int_{-\infty}^0 e^x dx$?Remarque : $\forall b \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^b 0 dx$ converge et vaut 0.

Propriété : (Critère de Riemann)

Soit $a < 0$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.1.3 Intégrale sur $] - \infty; + \infty[$

Définition :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.**Si les intégrales $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont convergentes**, on dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et dans ce cas : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$

Remarques :

- _ il faut donc montrer la convergence séparément en $+\infty$ et en $-\infty$.
- _ le choix du réel a est libre : il faut donc le choisir intelligemment.
- _ Attention à ne pas écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ avant d'avoir montré la convergence !
- _ comme pour l'intégrale sur un segment, la définition peut s'étendre aux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points, en lesquels la fonction admet une limite finie à gauche et à droite.

Exemples :

1) Convergence et valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$?

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et déterminer sa valeur.

Remarque :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

S'il existe un intervalle I tel que $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \neq 0 \\ \forall x \notin I, f(x) = 0 \end{cases}$, on dit que f est à support sur I .

On a alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_I f(x) dx$ converge.

Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_I f(x) dx$.

Ex : Dans l'exemple précédent, f est à support sur $[1; +\infty[$.

Comme $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et est égale à $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

2. Propriétés des intégrales convergentes

2.1 Linéarité / Relation de Chasles

Propriété (Linéarité de l'intégrale) :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; +\infty[$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

– Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ converge et :

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

– si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx$ converge et : $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx$

(propriété analogue sur $]-\infty; b]$ et $]-\infty; +\infty[$)

Propriété (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$. Soit $b \geq a$.

Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Dans ce cas : $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$. (analogue sur les autres intervalles)

$$2.2 F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ converge, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ converge.

On peut alors définir la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Pour déterminer l'expression de F :

Dans le cas où f est définie par intervalles, il faut étudier séparément quand x appartient à chacun de ces intervalles, et "découper" le chemin de $-\infty$ à x .

Remarque : "le chemin de $-\infty$ à x " doit toujours partir de " $-\infty$ " et arriver à " x " !

Exemple :

Soit f suite de l'exemple précédent : f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Déterminer l'expression de F .

2.3 Intégration par parties / Changements de variables

Attention, comme pour une recherche de primitive, une intégration par parties ne peut s'effectuer **que sur un segment**, et non sur un intervalle ouvert.

Par exemple, pour une intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, on effectuera l'intégration par parties sur $\int_a^X f(x)dx$, et on passera à la limite.

_ Attention à ne pas écrire d'égalité entre $\int_a^X f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Remarque :

Seuls les changements de variables affines sont autorisés sur un intervalle ouvert. Pour les autres, il faut effectuer le changement de variables sur le segment, et passer à la limite.

Exemples :

1) Montrer que $I = \int_1^{+\infty} x \cdot e^{-2x} dx$ est convergente. Calculer sa valeur.

2) (TRES CLASSIQUE)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. On admet que cette intégrale converge.

- Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n .
- En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

2.4 Convergence et parité

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Si f est paire ou impaire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx & \text{si } f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}$

Remarque :

Attention, même si f est impaire, il faut que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$!

Exemples :

1) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|x|)dx$ converge et calculer sa valeur.

2) Attention, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ est impaire, mais on ne peut pas dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dx = 0$ car $\int_0^{+\infty} x \cdot dx$ ne converge pas !

2.5 Convergence absolue

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$.

Si $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ est **convergente**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est **absolument convergente**.

(définition analogue sur $] -\infty; b]$, $] -\infty; +\infty[$)

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$.

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est **absolument convergente**, alors elle est **convergente**.

(propriété analogue sur $] -\infty; b]$, $] -\infty; +\infty[$)

3. Intégrale d'une fonction positive

Propriété (Positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$.

Si $\forall x \in [a; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ et si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq 0$.

(propriété analogue sur $] -\infty; b]$ et sur $] -\infty; +\infty[$).

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; +\infty[$.

On suppose que $\forall x \in [a; +\infty[$ $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$.

1) si $\forall x \in [a; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$

_ si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente

et $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$

_ si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est divergente.

2) si $f(x) \sim_{+\infty} o(g(x))$

_ si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

_ si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est divergente.

3) si $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est convergente.

Remarques :

_ N'oubliez pas de montrer la **positivité** des fonctions !

_ Pour montrer la convergence d'une intégrale, on peut donc :

_ chercher un équivalent plus simple

_ montrer qu'elle est négligeable devant une fonction intégrable (par exemple : $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$)

Exemples :

1) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+2} dx$ est-elle convergente ?

2) L'intégrale $\int_0^{+\infty} x.e^{-x} dx$ est-elle convergente ?