Chapitre 13 : Réduction – Niveau 2 - Correction

Exercice 1

A et B sont semblables, donc il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Soit λ une valeur propre de A. Alors il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$AX = \lambda X \quad \text{donc} \quad PBP^{-1}X = \lambda X.$$

$$\text{En multipliant à gauche par } P^{-1} : P^{-1}PBP^{-1}X = P^{-1}\lambda X \quad BP^{-1}X = \lambda P^{-1}X.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on a : $BY = \lambda Y$.

De plus, si $Y = 0$ $P^{-1}X = 0$ donc $PP^{-1}X = P0$ $X = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $X \neq 0$.

Donc $Y \neq 0$. Donc λ est valeur propre de B.

Remarque :

A et B ont des rôles symétriques, donc si λ est valeur propre de B, elle est aussi valeur propre de A.

Conclusion : **Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.**

Exercice 2

1) Soit X un vecteur propre pour AB associé à la valeur λ . ($X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

On a donc $X \neq 0$ et $(AB)X = \lambda X$

$$\text{Donc } BABX = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX \quad (BA)(BX) = \lambda BX.$$

En posant $Y = BX$, on a $(BA)Y = \lambda Y$

De plus, si $Y = 0$ $BX = 0$ donc $ABX = 0$ donc $\lambda X = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, on a donc : $X = 0$, ce qui est impossible. Donc $Y \neq 0$. Donc λ est une valeur propre de BA.

2) a) Si AB est inversible, il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(AB)C = I_n$ donc $A(BC) = I_n$
Donc A est inversible.

De même, il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D(AB) = I_n$, donc $(DA)B = I_n$. Donc B est inversible.

b) Si 0 est valeur propre de AB, alors AB n'est pas inversible.

Donc A ou B n'est pas inversible.

Donc BA n'est pas inversible. Donc 0 est valeur propre de BA.

3) Conclusion : si λ est valeur propre de AB, alors λ est valeur propre de BA.

A et B ayant des rôles symétriques, si λ est valeur propre de BA, alors λ est valeur propre de AB.

Donc AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 3

$$1) a) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} \quad L^2 = nL$$

b) $L^2 - nL = 0$ donc $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de L. $X^2 - nX = X(X - n)$.

Donc les seules valeurs propres possibles sont 0 et n.

c) L est symétrique donc est diagonalisable.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad LX = 0 \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \dots - x_n$$

$$\text{Donc } E_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c} -x_2 - x_3 \dots - x_n \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right), x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

$$LX = nX \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = nx_1 \\ \dots \\ x_1 + \dots + x_n = nx_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = nx_1 \\ 0 = nx_2 - nx_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \dots \\ 0 = nx_n - x_1 & L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nx_1 = nx_1 \\ x_2 = x_1 \\ \dots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_n = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \dots \\ x_1 \end{array} \right), x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ 1 \end{array} \right) \right).$$

d) $L^2 = nL$ "suite géométrique de raison n à partir de 1 ?"

Montrons par récurrence que $L^k = n^{k-1}L \forall k \geq 1$.

_ pour $k = 1 : L^k = L \quad n^{1-1}L = L$ donc vrai

_ si $L^k = n^{k-1}L \quad L^{k+1} = L^k \times L = n^{k-1}L^2 = n^{k-1}nL = n^kL$. Donc $\forall k \geq 1, L^k = n^{k-1}L$.

2) a) $A = xL + (y - x)I_n$.

b) I_n commute avec toutes les matrices, donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (xL)^i ((y-x)I_n)^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i L^i (y-x)^{k-i} I_n^{k-i} = (y-x)^k I_n + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i n^{i-1} L (y-x)^{k-i} \\ &= (y-x)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i n^{i-1} (y-x)^{k-i} \right) L = (y-x)^k I_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (nx)^i (y-x)^{k-i} \right) L \\ &= (y-x)^k I_n + \frac{1}{n} ((nx + y - x)^k - (y-x)^k) L \end{aligned}$$

c) L est diagonalisable, donc il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $L = PDP^{-1}$. Alors $A = xL + (y-x)I_n = xPDP^{-1} + (y-x)PI_nP^{-1} = P(xD + (y-x)I_n)P^{-1}$.

$xD + (y-x)I_n$ est aussi diagonale, donc A est diagonalisable.

Exercice 4

1) a) A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre, donc $\lambda \neq 0$.

Soit X un vecteur propre associé à λ alors $AX = \lambda X$

Donc $A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X \quad X = \lambda A^{-1}X \quad \lambda \neq 0$ donc $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$. Donc $\frac{1}{\lambda}$ vp de A^{-1} .

b) Si A diagonalisable, il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Donc $D = PAP^{-1}$ P, A et P^{-1} sont inversibles donc D aussi.

Donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ D^{-1} est diagonale, donc A^{-1} est diagonalisable.

2) Si A diagonalisable, il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Donc ${}^tA = {}^t(PDP^{-1}) = {}^t(P^{-1}){}^tD{}^tP$ Or ${}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$ ${}^tD = D$ (car D diagonale)

Donc ${}^tA = ({}^tP)^{-1}D({}^tP)$ Posons $P' = ({}^tP)^{-1}$ alors $P'^{-1} = {}^tP$ et ${}^tA = P'DP'^{-1}$.

Donc tA est diagonalisable.