Chapitre 13 : Réduction des matrices carrées

Principe :
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à décomposer A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$, où P est une matrice inversible et D une matrice diagonale.

1. Éléments propres d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
_ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On dit que λ est **valeur propre de A** s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que : $\mathbf{AX = \lambda X}$
_ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$.
On dit que X est un **vecteur propre de A** s'il existe un réel λ tel que $\mathbf{AX = \lambda X}$.

Remarques :
_ dans les exercices, on notera souvent v.p. pour valeur propre et V.P. pour vecteur propre.
_ Attention, λ est valeur propre de A si l'équation $AX = \lambda X$ admet une solution **NON NULLE**.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A :
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

2) Montrer que 5 est valeur propre de A :
$A.X = 5X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 5x \\ -2x + 4y = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2x$
$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ 5 est vp de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un VP associé.

Remarque :
Jusqu'à l'année dernière, les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme étaient au programme, mais ce n'est plus le cas.
Pour votre culture voici la définition en question :
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
_ *soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$*
_ *soit $x \in E$, $x \neq 0$. On dit que x est un vecteur propre de u s'il existe un réel λ tel que $u(x) = \lambda x$.*

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **spectre** de A l'ensemble des valeurs propres de A.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
On appelle **sous-espace propre** associé à λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{E_\lambda(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ A.X = \lambda X \}}$$

(c'est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ + le vecteur nul)

Exemple : suite de l'exemple précédent

On a déjà trouvé que : $E_5(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer $E_2(A)$.

Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2x \\ -2x + 4y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 0 = 0 \end{cases}$ Donc $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
Alors **$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**.

Remarques :

_ Si λ est une valeur propre de A, l'équation $AX = \lambda X$ admet des solutions non nulles, donc $E_\lambda(A)$ contient d'autres vecteurs que le vecteur nul.
Donc **$\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$**
_ attention, trouver un vecteur propre ne signifie pas avoir trouvé l'intégralité du sous-espace propre !

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A.
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
Alors **$E_\lambda(A) = \text{Ker}(u - \lambda id)$**

Démonstration :

$X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow u(X) = \lambda X \Leftrightarrow u(X) - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (u - \lambda id)(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(u - \lambda id)$.
Donc $E_\lambda(A) = \text{Ker}(u - \lambda id)$

Remarque :

Comme $E_\lambda(A)$ est un noyau, il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1.3 Cas particulier de $\lambda = 0$

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible

Démonstration :
Le système $AX = 0$ admet des solutions non nulles si et seulement s'il n'est pas de Cramer, c'est-à-dire si et seulement si A n'est pas inversible.

Remarque :
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
Alors **0 est valeur propre de A $\Leftrightarrow$ A non inversible $\Leftrightarrow$ u non bijectif.**
Et dans ce cas, $\mathbf{E_0(A) = Ker(u)}$

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.

Les deux vecteurs colonnes sont colinéaires ($C_2 = 2C_1$), donc A n'est pas inversible. Donc 0 est valeur propre de A.

2. Recherche des valeurs propres / vecteurs propres

2.1 Valeurs propres et système de Cramer

Rappels :
_ Un système homogène est de Cramer si et seulement s'il n'admet que la solution nulle.
_ Pour un système à paramètre : $\mathbf{L_i \leftarrow aL_i + bL_j}$ n'est possible que si $\mathbf{a \neq 0}$.
_ toujours essayer de prendre des pivots qui ne dépendent pas de λ

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
λ est une valeur propre de A si et seulement si **le système $(A - \lambda I_n)X = 0$** (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) **n'est pas un système de Cramer**.

Démonstration :
$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$.
Le système homogène admet une solution non nulle si et seulement s'il n'est pas de Cramer.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (5-\lambda)x - 2y = 0 \\ 4x + (-1-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + (-1-\lambda)y = 0 \\ (5-\lambda)x - 2y = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + (-1-\lambda)y = 0 \\ (5-\lambda)(-1-\lambda)y + 8y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow (5-\lambda)L_1 - 4L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + (-1-\lambda)y = 0 \\ (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y = 0 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ $(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$.

Donc les deux valeurs propres sont 1 et 3.

_ $\lambda = 1$: $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$ donc $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

_ $\lambda = 3$: $\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x$ donc $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Remarque :

Dans le cas d'un système 3×3 :

_ pour le premier pivot, il vaut mieux échanger L_1 et L_3

_ pour le deuxième, il faut impérativement ouvrir les yeux pour voir quelle opération simple il est possible d'effectuer.

_ pensez à toutes les astuces qui permettent de simplifier le système (substitution, combinaison simple, disjonction des cas, échange de la place des lettres)

2.2 Valeurs propres et matrices inversibles

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors **λ est valeur propre de A** si et seulement si **$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible**.

Démonstration :
$AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$ le système n'est pas de Cramer si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 2 est-elle valeur propre de A ?
$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes sont colinéaires, donc la matrice n'est pas inversible. Donc 2 est valeur propre de A.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
Notons $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice $A - \lambda I$.
Si $(a_1, \ldots, a_n)$ sont des réels non tous nuls tels que $a_1C_1 + \ldots + a_nC_n = 0$,
alors $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Démonstration :
$(A - \lambda I)a = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1C_1 + \ldots + a_nC_n = 0$ donc a est un vecteur propre associé à λ.

Ex : suite de l'ex précédent : $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C_1 + C_2 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 2.

Remarque : Attention, cette méthode permet de trouver un vecteur propre, mais pas l'intégralité du sous-espace propre !

Propriété : **Rang et sous-espaces propres**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
Alors **$\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$**.

Démonstration :
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
Alors on sait que $E_\lambda(A) = \text{Ker}(u - \lambda.\text{id})$.
En appliquant le théorème du rang à $u - \lambda \text{id}_E$, on obtient :
$\dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \text{rang}(u - \lambda \text{id}_E)$
$\dim(E_\lambda(A)) \quad = \quad n \quad - \text{rang}(A - \lambda I_n)$.

Ex (suite de l'exemple précédent)
Déterminer le rang de $A - 2I_2$. En déduire la dimension de $E_2(A)$.

$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{rang}(A - 2I) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ($\neq 0$ donc libre) $= 1$
Donc $\dim(E_2(A)) = 2 - \text{rang}(A - 2I) = 2 - 1 = 1$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre non nul, donc forme une base de $E_1(A)$.

Rappel : si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le déterminant de B est défini par **$\det(B) = ad - bc$**.
Et on a : **B inversible si et seulement si $\det(B) \neq 0$**.
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut donc trouver facilement à quelles conditions $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Ex : Valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$?

$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -8 & 7-\lambda \end{pmatrix}$
λ vp de A $\Leftrightarrow A - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow (-5 - \lambda)(7 - \lambda) - (-8)4 = 0$
$\Leftrightarrow -35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$ (-1 racine évidente)
$\Leftrightarrow \lambda = -1$ ou 3

2.3 Valeurs propres et matrices triangulaires

Propriété :

Soit A une matrice **triangulaire** supérieure (on inférieure). Alors **ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux**.

Démonstration :
Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ alors $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n,n}-\lambda \end{pmatrix}$.
Donc $A - \lambda I$ non inversible si et seulement si $a_{1,1} - \lambda = 0$ ou … ou $a_{n,n} - \lambda = 0$
$\lambda = a_{1,1}$ …. $\lambda = a_{n,n}$

Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de A.

A est triangulaire donc ses valeurs propres sont 1, 2 et 5.

2.4 Polynôme annulateur

Rappels :
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $P(A)$ la matrice définie par : $P(A) = a_pA^p + \dots + a_1A + a_0I_n$.
Si $P(A) = 0_n$, on dit que P est un polynôme annulateur de A.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A.
Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de P.
"Les seules **valeurs propres possibles** de A sont les racines de P."

Démonstration :
Si λ est une valeur propre de A : il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.
Alors $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2X$ et par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N} : A^kX = \lambda^kX$.
Si $P(x) = a_px^p + \dots + a_1x + a_0$

$$\begin{aligned}P(A)X &= (a_pA^p + \dots + a_1A + a_0I_n)X\\ &= a_pA^pX + \dots + a_1AX + a_0I_nX\\ &= a_p\lambda^pX + \dots + a_1\lambda X + a_0X\\ &= (a_p\lambda^p + \dots + a_1\lambda + a_0)X\\ &= P(\lambda)X\end{aligned}$$

Si P est un polynôme annulateur de A, $P(A) = 0$ donc $P(\lambda)X = 0$.
Or $X \neq 0$, donc : $P(\lambda) = 0$.

Remarque :
Attention, toutes les racines de P ne sont pas toujours des valeurs propres de A.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que $X^3 - X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A.
2) En déduire les valeurs propres de A.

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$
$A^3 - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -18 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -12 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $X^3 - X^2 - 2X$ est polynôme annulateur de A.
2) $X^3 - X^2 - 2X = X(X^2 - X - 2) = X(X - 2)(X + 1)$ (2 est racine évidente). Les racines sont -1, 0 et 2.
Donc les valeurs propres possibles de A sont -1, 0 et 2. $Sp(A) \subset \{-1,0,2\}$
$A + I = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ les deux colonnes sont colinéaires, donc A + I n'est pas inversible donc -1 est valeur propre.
A est inversible (colonnes non colinéaires), donc 0 n'est pas valeur propre.
$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$ colonnes donc 2 est valeur propre.

3. Réduction d'une matrice

3.1 Propriétés des vecteurs propres

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A et si $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres, alors $e_1, \ldots, e_p$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
(**des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre**).

Propriété :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet **au plus n valeurs propres distinctes**.

Démonstration :
D'après la propriété précédente, s'il y a p valeurs propres distinctes, il y a p vecteurs qui forment une famille libre. Or $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$. Donc $p \leq n$.

Propriété : (admise)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A et si on considère une base de chacun des espaces propres, la famille composée de tous ces vecteurs est encore une famille libre.

Remarque :
Cette famille est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension n.
Il y a donc deux situations possibles :
_ Soit cette famille contient n vecteurs : dans ce cas, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres
_ Soit cette famille contient moins de n vecteurs : dans ce cas, ce n'est pas une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Corollaire :

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la somme des dimensions des sous-espaces propres est donc toujours inférieure ou égale à n.

3.2 Matrices diagonalisables

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que **A est diagonalisable s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A**.

Propriété (admise) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
Dans ce cas, une base de vecteurs propres est obtenue par regroupement des bases des sous-espaces propres.

Remarque :
_ Si A n'est pas diagonalisable, on obtient une famille libre de vecteurs propres, qui n'est pas suffisante pour former une base.
_ attention, l'espace étudié est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n, à ne pas confondre avec la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est n^2).

Exemples :

1) Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On voit que Sp(A) = {1,2}.

On admet que $E_1(A)$ = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A)$ = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nul donc forme une base de $E_1(A)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc forment une base de $E_2(A)$

$\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 1 + 2 = 3$ $\quad$ $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$. Donc A est diagonalisable.

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

2) Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a : Sp(A) = {1}. On admet que $E_1(A)$ = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$\dim(E_1(A)) = 1$ $\quad$ $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ A n'est pas diagonalisable.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.
Dans ce cas, **chaque sous-espace propre est de dimension 1**.

Démonstration : pour chaque valeur propre, on peut choisir au moins un vecteur propre.
La famille constituée de ces n vecteurs propres est une famille libre.
Comme cette famille libre contient n éléments dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n, c'est une base.
Donc A est diagonalisable.

Remarque : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être diagonalisable sans avoir n valeurs propres distinctes !

Exemple :

Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A est triangulaire donc Sp(A) = {-1;1;2}.

A a trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Rappel :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.

Propriété (admise) :

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

A est symétrique, donc elle est diagonalisable. (mais on n'a pas directement ses valeurs propres).

3.3 Application au changement de base

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice **P inversible** et une matrice **D diagonale** telles que : $\mathbf{A = PDP^{-1}}$.
Dans ce cas, la matrice **P** contient en colonnes les **vecteurs propres** de la base, et **D** contient les **valeurs propres** associées.

Démonstration :
Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique.
_ Si A est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}'$ constituée de vecteurs propres.
Soit $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ cette base. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (non forcément distinctes).
Alors $u(f_1) = Af_1 = \lambda_1 f_1, \ldots, u(f_n) = \lambda_n f_n$.

Alors $D = M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(f_1) & \ldots & u(f_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{array} \end{array}$ est diagonale (et contient les valeurs propres).

Posons $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. P contient en colonnes les vecteurs propres associés
On a donc : $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, $D = M_{\mathcal{B}'}(u)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$
D'après la formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$.
_ Inversement, si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale : soit $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ la base telle que $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.
Comme $D = P^{-1}AP$, alors, d'après la formule de changement de base $D = M_{\mathcal{B}'}(u)$.
D est diagonale, donc $u(f_1), \ldots, u(f_n)$ sont proportionnels à $f_1, \ldots, f_n$, donc $f_1, \ldots, f_n$ sont des vecteurs propres.
On a donc une base de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable.

Remarques :
_ une matrice est donc diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
_ Une fois que la matrice est réduite, on peut l'utiliser pour un calcul d'inverse, de puissance, une équation matricielle, etc… voir chapitre application linéaire

Ex :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu que A a pour valeurs propres 1 et 2 et : $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.

$\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

D'après la formule de changement de base,

$A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques :

_ Si une partie de la décomposition est donnée (P ou D), il est beaucoup plus facile de chercher les éléments propres :

- D doit contenir les valeurs propres sur sa diagonale
- P doit contenir les vecteurs propres en colonnes.

_ dans l'énoncé, une indication permet souvent de fixer l'ordre des vecteurs propres et leurs valeurs.

_ Si A n'est pas diagonalisable, il faut compléter une famille de vecteurs propres pour obtenir une base $\mathcal{B}'$ (avec aide de l'énoncé). (Notons encore u l'endomorphisme canoniquement associé).

La matrice dans $\mathcal{B}'$ n'est pas diagonale, mais en général triangulaire.

Dans ce cas **$A = PTP^{-1}$ où $P = P_{B \to B'}$ et $T = M_{B'}(u)$.**

_ Si deux matrices sont semblables, alors on peut montrer qu'elles ont les mêmes valeurs propres.

Donc si $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire, la diagonale de T contient les valeurs propres de A.

Important, à redémontrer à chaque fois :

Soit A une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre λ, et qui n'est pas diagonale. Alors on peut montrer que A n'est pas diagonalisable :

Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$,

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$ donc $A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$.

Donc si A n'a qu'une valeur propre et si $A \neq \lambda I$, A n'est pas diagonalisable.

Conclusion :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors λ est valeur propre de A $\Leftrightarrow$ il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$
$\Leftrightarrow$ le système $AX = \lambda X$ (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) n'est pas de Cramer
$\Leftrightarrow$ la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteurs propres
$\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n
$\Leftrightarrow$ il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$