

Chapitre 13 : Réduction des matrices carrées

Principe :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à décomposer A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$, où P est une matrice inversible et D une matrice diagonale.

1. Éléments propres d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

_ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On dit que λ est **valeur propre de A** s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que : $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$

_ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$.

On dit que X est un **vecteur propre de A** s'il existe un réel λ tel que $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$.

Remarques :

_ dans les exercices, on notera souvent v.p. pour valeur propre et V.P. pour vecteur propre.

_ Attention, λ est valeur propre de A si l'équation $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ admet une solution **NON NULLE**.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A :

2) Montrer que 5 est valeur propre de A :

Remarque :

Jusqu'en 2022, les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme étaient au programme, mais ce n'est plus le cas.

Pour votre culture voici la définition en question :

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

_ soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$

_ soit $x \in E$, $x \neq 0$. On dit que x est un vecteur propre de u s'il existe un réel λ tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **spectre** de A l'ensemble des valeurs propres de A.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.

On appelle **sous-espace propre** associé à λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{A}) = \{ \mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \}$$

(c'est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ + le vecteur nul)

Exemple : suite de l'exemple précédent

On a déjà trouvé que : $E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer $E_2(A)$.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.

Alors $\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarques :

_ Si λ est une valeur propre de A, l'équation $AX = \lambda X$ admet des solutions non nulles, donc $E_\lambda(A)$ contient d'autres vecteurs que le vecteur nul.

Donc $\dim(\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{A})) \geq 1$

_ attention, trouver un vecteur propre ne signifie pas avoir trouvé l'intégralité du sous-espace propre !

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit λ une valeur propre de A.

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. (c'est-à-dire $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), u(X) = A \cdot X$)

Alors $\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{A}) = \mathbf{Ker}(u - \lambda \cdot \mathbf{id})$

Démonstration :

$X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow u(X) = \lambda X \Leftrightarrow u(X) - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{id})(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id})$.

Donc $E_\lambda(A) = \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id})$

Remarque :

Comme $E_\lambda(A)$ est un noyau, il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1.3 Cas particulier de $\lambda = 0$

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible**

Démonstration :

Le système $AX = 0$ admet des solutions non nulles si et seulement si il n'est pas de Cramer, c'est-à-dire si et seulement si A n'est pas inversible.

Remarque :

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.Alors **0 est valeur propre de A \Leftrightarrow A non inversible \Leftrightarrow u non bijectif.**Et dans ce cas, $E_0(A) = \text{Ker}(u)$ Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.

2. Recherche des valeurs propres / vecteurs propres

2.1 Valeurs propres et système de Cramer

Rappels :

- _ Un système homogène est de Cramer si et seulement si il n'admet que la solution nulle.
- _ Pour un système à paramètre : $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ n'est possible que si $a \neq 0$.
- _ toujours essayer de prendre des pivots qui ne dépendent pas de λ

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. **λ est une valeur propre de A si et seulement si le système $(A - \lambda I_n)X = 0$ (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) n'est pas un système de Cramer.**

Démonstration :

 $AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$.

Le système homogène admet une solution non nulle si et seulement si il n'est pas de Cramer.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

Remarque :

Dans le cas d'un système 3×3 :

_ pour le premier pivot, il vaut mieux échanger L_1 et L_3

_ pour le deuxième, il faut impérativement ouvrir les yeux pour voir quelle opération simple il est possible d'effectuer.

_ pensez à toutes les astuces qui permettent de simplifier le système (substitution, combinaison simple, disjonction des cas, échange de la place des lettres)

2.2 Valeurs propres et matrices inversibles

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Démonstration :

 $AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$ le système n'est pas de Cramer si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 2 est-elle valeur propre de A ?

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A .Notons C_1, \dots, C_n les vecteurs colonnes de la matrice $A - \lambda I$.Si (a_1, \dots, a_n) sont des réels non tous nuls tels que $a_1 C_1 + \dots + a_n C_n = 0$,alors $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Démonstration :

 $(A - \lambda I)a = (C_1 \dots C_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 C_1 + \dots + a_n C_n = 0$ donc a est un vecteur propre associé à λ .

Ex : suite de l'ex précédent :

Remarque : Attention, cette méthode permet de trouver un vecteur propre, mais pas l'intégralité du sous-espace propre !

Propriété : **Rang et sous-espaces propres**Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A .Alors $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$.

Démonstration :

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . (défini par $u(X) = AX, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)Alors on sait que $E_\lambda(A) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$.En appliquant le théorème du rang à $u - \lambda \text{id}_E$, on obtient : $\dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \text{rang}(u - \lambda \text{id}_E)$ $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$.

Ex (suite de l'exemple précédent)

Déterminer le rang de $A - 2I_2$. En déduire la dimension de $E_2(A)$.

Rappel : si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le déterminant de B est défini par $\det(B) = ad - bc$.

Et on a : **B inversible si et seulement si $\det(B) \neq 0$.**

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut donc trouver facilement à quelles conditions $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Ex : Valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$?

2.3 Valeurs propres et matrices triangulaires

Propriété :

Soit A une matrice **triangulaire** supérieure (ou inférieure). Alors **ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux**.

Démonstration :

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ alors $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}$.

Donc $A - \lambda I$ non inversible si et seulement si $a_{1,1} - \lambda = 0$ ou ... ou $a_{n,n} - \lambda = 0$
 $\lambda = a_{1,1} \dots \lambda = a_{n,n}$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de A.

2.4 Polynôme annulateur

Rappels :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $P(A)$ la matrice définie par : $P(A) = a_pA^p + \dots + a_1A + a_0I_n$.

Si $P(A) = 0_n$, on dit que P est un polynôme annulateur de A .

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A .

Si λ est une valeur propre de A , alors λ est une racine de P .

"Les seules **valeurs propres possibles** de A sont les racines de P ."

Démonstration :

Si λ est une valeur propre de A : il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.

Alors $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2X$ et par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N} : A^kX = \lambda^kX$.

Si $P(x) = a_px^p + \dots + a_1x + a_0$

$$\begin{aligned} P(A)X &= (a_pA^p + \dots + a_1A + a_0I_n)X \\ &= a_pA^pX + \dots + a_1AX + a_0I_nX \\ &= a_p\lambda^pX + \dots + a_1\lambda X + a_0X \\ &= (a_p\lambda^p + \dots + a_1\lambda + a_0)X \\ &= P(\lambda)X \end{aligned}$$

Si P est un polynôme annulateur de A , $P(A) = 0$ donc $P(\lambda)X = 0$.

Or $X \neq 0$, donc : $P(\lambda) = 0$.

Remarque :

Attention, toutes les racines de P ne sont pas toujours des valeurs propres de A .

$$\text{Ex : } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $X^3 - X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A .

2) En déduire les valeurs propres de A .

3. Réduction d'une matrice

3.1 Propriétés des vecteurs propres

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A et si e_1, \dots, e_p sont des vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres, alors e_1, \dots, e_p forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre).

Propriété :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet **au plus n valeurs propres distinctes**.

Démonstration :

D'après la propriété précédente, s'il y a p valeurs propres distinctes, il y a p vecteurs qui forment une famille libre. Or $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$. Donc $p \leq n$.

Propriété : (admise)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A et si on considère une base de chacun des espaces propres, la famille composée de tous ces vecteurs est encore une famille libre.

Remarque :

Cette famille est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension n .

Il y a donc deux situations possibles :

- _ Soit cette famille contient n vecteurs : dans ce cas, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres
- _ Soit cette famille contient moins de n vecteurs : dans ce cas, ce n'est pas une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Corollaire :

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la somme des dimensions des sous-espaces propres est donc toujours inférieure ou égale à n .

3.2 Matrices diagonalisables

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **diagonalisable** s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .

Propriété (admise) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n . Dans ce cas, une base de vecteurs propres est obtenue par regroupement des bases des sous-espaces propres.

Remarque :

_ Si A n'est pas diagonalisable, on obtient une famille libre de vecteurs propres, qui n'est pas suffisante pour former une base.

_ attention, l'espace étudié est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n , à ne pas confondre avec la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est n^2).

Exemples :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On voit que $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

On admet que $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a : $\text{Sp}(A) = \{1\}$. On admet que $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. A est-elle diagonalisable ?

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Dans ce cas, **chaque sous-espace propre est de dimension 1.**

Démonstration : pour chaque valeur propre, on peut choisir au moins un vecteur propre.

La famille constituée de ces n vecteurs propres est une famille libre.

Comme cette famille libre contient n éléments dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n, c'est une base.

Donc A est diagonalisable.

Remarque : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être diagonalisable sans avoir n valeurs propres distinctes !

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Rappel :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.

Propriété (admise) :

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

3.3 Application au changement de base

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice **P inversible** et une matrice **D diagonale** telles que : $A = PDP^{-1}$.

Dans ce cas, la matrice **P** contient en colonnes les **vecteurs propres** de la base, et **D** contient les **valeurs propres** associées.

Démonstration :

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . (défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), u(X) = A.X$)

On note \mathcal{B} la base canonique.

_ Si A est diagonalisable, il existe une base \mathcal{B}' constituée de vecteurs propres.

Soit $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ cette base. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (non forcément distinctes).

Alors $u(f_1) = Af_1 = \lambda_1 f_1, \dots, u(f_n) = \lambda_n f_n$.

Alors $D = M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{matrix}$ est diagonale (et contient les valeurs propres).

Posons $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. P contient en colonnes les vecteurs propres associés

On a donc : $A = M_{\mathcal{B}}(u), D = M_{\mathcal{B}'}(u), P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$

D'après la formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$.

_ Inversement, si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale : soit $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ la base telle que $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Comme $D = P^{-1}AP$, alors, d'après la formule de changement de base $D = M_{\mathcal{B}'}(u)$.

D est diagonale, donc $u(f_1), \dots, u(f_n)$ sont proportionnels à f_1, \dots, f_n , donc f_1, \dots, f_n sont des vecteurs propres.

On a donc une base de vecteurs propres de A . Donc A est diagonalisable.

Remarques :

_ une matrice est donc diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

_ Une fois que la matrice est réduite, on peut l'utiliser pour un calcul d'inverse, de puissance, une équation matricielle, etc... voir chapitre application linéaire

Ex :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu que A a pour valeurs propres 1 et 2 et : $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.

Remarques :

_ Si une partie de la décomposition est donnée (P ou D), il est beaucoup plus facile de chercher les éléments propres :

- D doit contenir les valeurs propres sur sa diagonale
- P doit contenir les vecteurs propres en colonnes.

_ dans l'énoncé, une indication permet souvent de fixer l'ordre des vecteurs propres et leurs valeurs.

_ Si A n'est pas diagonalisable, il faut compléter une famille de vecteurs propres pour obtenir une base \mathcal{B}' (avec aide de l'énoncé). (Notons encore u l'endomorphisme canoniquement associé).

La matrice dans \mathcal{B}' n'est pas diagonale, mais en général triangulaire.

Dans ce cas $A = PTP^{-1}$ où $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et $T = M_{\mathcal{B}'}(u)$.

_ Si deux matrices sont semblables, alors on peut montrer qu'elles ont les mêmes valeurs propres.

Donc si $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire, la diagonale de T contient les valeurs propres de A.

Important, à redémontrer à chaque fois :

Soit A une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre λ , et qui n'est pas diagonale. Alors on peut montrer que A n'est pas diagonalisable :

Conclusion :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors λ est valeur propre de A \Leftrightarrow il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$
 \Leftrightarrow le système $AX = \lambda X$ n'est pas de Cramer
 \Leftrightarrow la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

A est diagonalisable \Leftrightarrow il existe une base de vecteurs propres
 \Leftrightarrow la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n
 \Leftrightarrow il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$
 \Leftrightarrow A est semblable à une matrice diagonale