Chapitre 13 : Réduction d'une matrice – Feuille n°1

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ -6 & 4 & 12 \\ 3 & -3 & -8 \end{pmatrix}$. On considère les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A.u_1$ et $A.u_2$. En déduire deux valeurs propres de A.
2) Déterminer les sous-espaces propres correspondants.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que 2 et 7 sont valeurs propres de A. Déterminer les sous-espaces propres correspondants.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme: $\begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x - y - 2z \\ 5x + y \end{pmatrix} \end{cases}$. Soit A la matrice de f dans la base canonique.

1) Déterminer Ker(f).
2) En déduire une valeur propre de A et le sous-espace propre associé.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.

Exercice 5

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

2) Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A.

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2) f est-elle un automorphisme ?