Chapitre 13 – Réduction – Feuille n°2

Exercice 1

Soit A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que -1,0 et 3 sont des valeurs propres de A. Déterminer un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs propres.

Exercice 2

Rappels : $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} {}^t(B + C) = \\ {}^t(\lambda B) = \\ {}^t(BC) = \end{cases}$

rang(${}^tB$*) =* *donc* ${}^tB$ *inversible* $\Leftrightarrow$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que λ est valeur propre de ${}^tA$ si et seulement si λ est valeur propre de A.

Exercice 3

Retrouver d'une autre manière les valeurs propres de la matrice A = $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $(A - 4I_3)^2(A - 2I_3)$.

2) Déterminer les valeurs propres de A, et les sous-espaces propres associés.

Exercice 5 Reprenons certains des exercices précédents :

Feuille n°1 : Ex 5 : A = $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sp(A) = {1;2} $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ex 7 A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Sp(A) = {1;4} $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ $E_4(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Feuille 2 ex1 A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ -1, 0 et 3 sont des valeurs propres, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres correspondants.

ex 4 : $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Sp(A) = {2;4} $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $E_4(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

A chaque fois, déterminer si A est diagonalisable. Si oui, donner une base de vecteurs propres.

Exercice 6 Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 8

Reprenons les matrices de l'exercice 5.

Dans les cas où A est diagonalisable, déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.