Chapitre 13 : Réduction – Feuille n°3

Exercice 1

Reprenons la matrice A de l'exercice 5 feuille n°1 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On vient de montrer que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
2) En déduire l'expression de X_n en fonction de A, X_0 et n, puis de P, D, P^{-1}, X_0 et n.
3) Résoudre l'équation $PY = X_0$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
4) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu (feuille 2, ex. 4) que :

$Sp(A) = \{2, 4\}$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et donc A n'est pas diagonalisable.

Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2) Déterminer une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le spectre de A.
2) En raisonnant par l'absurde, montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $N \neq 0_n$ et qu'il existe $k \geq 1$ tel que $N^{k-1} \neq 0_n$ et $N^k = 0_n$. (on dit que N est nilpotente d'ordre k)
1) a) Montrer que la seule valeur propre possible pour N est 0.
b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $N^{k-1}X \neq 0_{n,1}$. On pose $Y = N^{k-1}X$.
Calculer NY. Que peut-on en déduire ?
2) Montrer que N n'est pas diagonalisable.

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.

Exercice 6

1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que A n'est pas une matrice diagonale.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A admet deux valeurs propres distinctes.
2) Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $(a - d)^2 + 4bc > 0$.