

Chapitre 14 : Développements limités

1. Notion de développement limité

1.1 Développement limité en 0

Rappels et compléments :

Soit f , g et h des fonctions définies sur un voisinage de 0. Alors :

$$_ f(x) =_0 o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{En particulier : } f(x) =_0 o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} _ f(x) =_0 o(g(x)) &\Leftrightarrow f(x) =_0 o(\lambda g(x)) \text{ (si } \lambda \neq 0) & \text{"si } \lambda \neq 0, o(\lambda \cdot g(x)) = o(g(x))" \\ &\Leftrightarrow x f(x) =_0 o(x g(x)) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} =_0 o\left(\frac{g(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

$$_ \text{si } f(x) =_0 o(h(x)) \text{ et } g(x) =_0 o(h(x)) \text{ alors } f(x) + g(x) =_0 o(h(x)) \text{ et } f(x) - g(x) =_0 o(h(x))$$

$$_ o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x)) \quad o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$$

$$_ x =_0 o(1), x^2 =_0 o(x), x^3 =_0 o(x^2), \dots$$

_ en 0, un polynôme est équivalent à son monôme non nul de plus bas degré.

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.

On dit que f possède un **développement limité d'ordre 1 en 0** s'il existe des réels a_0, a_1 tels que :

$$f(x) =_0 a_0 + a_1 x + o(x).$$

On dit que f possède un **développement limité d'ordre 2 en 0** s'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que :

$$f(x) =_0 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2).$$

Remarques :

$$_ f(x) =_0 a_0 + a_1 x + o(x) \text{ signifie que } f(x) = a_0 + a_1 x + g(x), \text{ avec } g(x) =_0 o(x)$$

$$(f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + g(x) \text{ avec } g(x) =_0 o(x^2) \text{ pour un d.l. d'ordre 2.}$$

_ On peut trouver également comme définition d'un d.l. d'ordre 1 (d'ordre 2) :

$$f(x) =_0 a_0 + a_1 x + x \cdot \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \quad f(x) =_0 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{En effet : pour un d.l. d'ordre 1 : posons } g(x) = x \cdot \varepsilon(x) \quad g(x) = o(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

_ la partie polynomiale ($a_0 + a_1 x + a_2 x^2$) est appelée **partie régulière** du développement limité.

Elle donne une bonne approximation de la valeur de f au voisinage de 0.

_ Si f admet un développement limité en 0, alors le développement limité est unique.

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.

Si f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) =_0 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$, alors f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, qui est : $f(x) =_0 a_0 + a_1 x + o(x)$.

(car $a_2 x^2 =_0 o(x)$ et $x^2 =_0 o(x)$)

Exemple : On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$.

En déduire le développement limité d'ordre 1 et d'ordre 2 de $(1+x)^3$ en 0.

$$3x^2 + x^3 =_0 o(x) \text{ donc } (1+x)^3 = 1 + 3x + o(x) \text{ (d.l. d'ordre 1)}$$

$$x^3 = o(x^2) \text{ donc } (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + o(x^2) \text{ (d.l. d'ordre 2).}$$

Autres exemples (justifiés plus tard) : $e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, ...

1.2 Développement limité en x_0

Remarque : En $x_0 \in \mathbb{R}$: $x - x_0 = o(1)$, $(x - x_0)^2 =_{x_0} o(x - x_0)$.

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 .

On dit que f possède un développement limité d'ordre 1 en x_0 s'il existe des réels a_0, a_1 tels que

$$f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0).$$

On dit que f possède un développement limité d'ordre 2 en x_0 s'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que

$$f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Remarque importante :

Pour passer d'un développement limité en x_0 à un développement limité en 0, il suffit de poser $x = x_0 + h$ (c'est-à-dire $h = x - x_0$)

Ex : développement limité d'ordre 2 en 1 de $f(x) = x^3$:

$$\text{Avec } x = 1 + h : x^3 = (1 + h)^3 =_0 1 + 3h + 3h^2 + o(h^2)$$

$$x^3 =_{x_0} 1 + 3(x - x_0) + 3(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

1.3 Développement limité d'une fonction de classe C^1 , de classe C^2

Propriété : **Formule de Taylor-Young**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

_ si f est de **classe C^1** sur I , alors $\forall x_0 \in I$, $f(x) =_{x_0} f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + o(x - x_0)$

_ si f est de **classe C^2** sur I , alors $\forall x_0 \in I$,

$$f(x) =_{x_0} f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Remarques :

_ si f est dérivable en x_0 , l'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

La tangente est une "bonne approximation" de la courbe au voisinage du point.

_ en particulier en 0, la 2^{ème} formule devient : $f(x) =_0 f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$.

Exemple : Soit $f(x) = \ln(x)$.

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 2 :

f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

D'après la formule de Taylor-Young : $f(x) =_2 f(2) + (x - 2)f'(2) + \frac{(x - 2)^2}{2} f''(2) + o((x - 2)^2)$

$$f(2) = \ln(2) \quad f'(2) = \frac{1}{2} \quad f''(2) = -\frac{1}{4}$$

$$\ln(x) =_2 \ln(2) + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{(x - 2)^2}{8} + o((x - 2)^2)$$

2. Développements limités usuels et opérations

2.1 Développements limités usuels

Propriété : A connaître :

$$e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \frac{1}{1-x} =_0 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha =_0 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

Démonstration :

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 avec les fonctions :

$$f(x) = e^x \text{ (de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}) \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \quad f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ (de classe } C^\infty \text{ sur }]-\infty; 1[) \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad f''(x) = -\frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 2$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \text{ (} = e^{\alpha \ln(1+x)} \text{)} \quad f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-1; +\infty[$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = \alpha \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

Remarques :

_ on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$

$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$ on trouve une grande analogie entre les formules

_ Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 1^k x^k = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \dots$$

$$= 1 + px + \frac{p!}{2!(p-2)!} x^2 + \dots = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2} x^2 + \dots$$

On retrouve les coefficients ci-dessus.

Exemples :

1) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+3x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \text{ et } \ln(1+X) =_0 X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) \text{ donc } \ln(1+3x) =_0 3x - \frac{(3x)^2}{2} + o((3x)^2)$$

$$\ln(1+3x) =_0 3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2).$$

2) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} =_0 (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

3) Déterminer le développement limité en 2 de $f(x) = \sqrt{x}$?

$$\begin{aligned} x = 2 + h \quad f(2 + h) &= \sqrt{2 + h} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{h}{2}} =_0 \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + o\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \right) \\ &=_0 \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} h - \frac{\sqrt{2}}{32} h^2 + o(h^2) \\ f(x) &=_2 \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} (x - 2) - \frac{\sqrt{2}}{32} (x - 2)^2 + o((x - 2)^2) \end{aligned}$$

2.2 Développements limités et opérations

Propriété :

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On suppose que :} \quad f(x) &=_0 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2) \\ g(x) &=_0 b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \lambda f(x) =_0 \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + o(x^2)$$

$$x \cdot f(x) =_0 a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + o(x^3) = a_0 x + a_1 x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{f(x)}{x} =_0 \frac{a_0}{x} + a_1 + a_2 x + o(x)$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + o(x^2)$$

Exemple :

Développement limité en 0 de $xe^x - \ln(1 + x)$?

$$xe^x = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad xe^x - \ln(1 + x) = x + x^2 - \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + o(x^2) = \frac{3x^2}{2} + o(x^2).$$

3. Applications des développements limités

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 .

Si f admet un développement limité d'ordre 1 ou 2 en x_0 , alors **f est équivalente au monôme non nul de plus bas degré de son développement limité** (s'il y en a un)

Ex :

Limite de $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ en 0 ?

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x - 1 - x =_0 \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ donc } e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}. \quad \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 (x_0 compris).

_ Si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 :

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ alors f est dérivable en x_0 , $f'(x_0) = a_1$, et l'équation de la tangente en x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

_ Si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$

$$(f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))) = a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

_ si $a_2 > 0$ la courbe est située **localement au-dessus de sa tangente**

_ si $a_2 < 0$ la courbe est située **localement en dessous de sa tangente**

Exemple :

A l'aide d'un développement limité, montrer que la fonction exp est dérivable en 0, déterminer sa tangente en 0, et la position de la courbe par rapport à la tangente.

$$\text{On sait que } e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc la fonction exp est dérivable en 0, l'équation de la tangente est $y = 1 + x$.

$$e^x - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad \frac{x^2}{2} \geq 0 \text{ la courbe est localement au-dessus de sa tangente.}$$

Remarque pour les suites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc les résultats sur les d.l. en 0 peuvent être utiles pour trouver des approximations sur les suites, appelées développements asymptotiques.

Exemple :

Déterminer un développement asymptotique de $e^{1/n}$ en $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } e^{1/n} =_{+\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$