

Chapitre 14 : Développements limités – Exercices niveau 2

Exercice 1

Déterminer un équivalent de $(e + x)^e - e^{e+x}$ au voisinage de 0.

Exercice 2

La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ est-elle convergente ?

Exercice 3 - Méthode de la partie principale

On admet le résultat suivant : (Théorème de Césaro)

Si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel L alors la suite $\frac{u_0 + \dots + u_{n-1}}{n}$ converge aussi vers L .

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) =_0 x - \alpha x^2 + o(x^2)$.

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

1) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.

2) a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{+\infty} \frac{1}{u_n}$

b) En déduire que $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\alpha n}$