Chapitre 14 : Développements limités – Feuille n°1

Exercice 1

1) A l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction f définie par : $\forall x > -1$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

2) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 1 de la fonction f définie par :
$\forall x > 0$, $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2

Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de

a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 3

A l'aide des développements limités usuels, déterminer :

a) le d.l. d'ordre 2 en 1 de $f(x) = e^x$ b) le d.l. d'ordre 2 en 2 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 4

A l'aide de développements limités, déterminer la limite en 0 de :

a) $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{e^x - \dfrac{1}{1+x}}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Déterminer le développement limité d'ordre 1 de f en 0.
3) En déduire que f est dérivable en 0, déterminer f '(0) et l'équation de la tangente.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + x^3 - 2x$

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) =_0 a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Montrer que f est dérivable en 0, déterminer f '(0), l'équation de la tangente, et la position locale de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 7

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - n$