Chapitre 14 : Développements limités

1. Notion de développement limité

1.1 Développement limité en 0

Rappels et compléments :
Soit f, g et h des fonctions définies sur un voisinage de 0. Alors :

_ $\mathbf{f(x) =_0 o(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$ En particulier : $\mathbf{f(x) =_0 o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$

_ $f(x) =_0 o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) =_0 o(\lambda g(x))$ (si $\lambda \neq 0$) "si $\lambda \neq 0$, $\mathbf{o(\lambda.g(x)) = o(g(x))}$"
$\Leftrightarrow \mathbf{x.f(x) =_0 o(x.g(x))}$
$\Leftrightarrow \mathbf{\frac{f(x)}{x} =_0 o\left(\frac{g(x)}{x}\right)}$

_ si $f(x) =_0 o(h(x))$ et $g(x) =_0 o(h(x))$ alors $f(x) + g(x) =_0 o(h(x))$ et $f(x) - g(x) =_0 o(h(x))$
"$\mathbf{o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))}$ $\mathbf{o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))}$ "

_ $x =_0 o(1)$, $x^2 =_0 o(x)$, $x^3 =_0 o(x^2)$, …

_ en 0, un polynôme est équivalent à son monôme non nul de plus bas degré.

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que f possède un **développement limité d'ordre 1 en 0** s'il existe des réels a_0, a_1 tels que :
$\mathbf{f(x) =_0 a_0 + a_1x + o(x).}$
On dit que f possède un **développement limité d'ordre 2 en 0** s'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que :
$\mathbf{f(x) =_0 a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2).}$

Remarques :

_ $f(x) =_0 a_0 + a_1x + o(x)$ signifie que $f(x) = a_0 + a_1x + g(x)$, avec $g(x) =_0 o(x)$
($f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + g(x)$ avec $g(x) =_0 o(x^2)$) pour un d.l. d'ordre 2.

_ On peut trouver également comme définition d'un d.l. d'ordre 1 (d'ordre 2) :
$\mathbf{f(x) =_0 a_0 + a_1x + x.\varepsilon(x)}$ **avec** $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0}$ $\mathbf{f(x) =_0 a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^2\varepsilon(x)}$ **avec** $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0}$

En effet : pour un d.l. d'ordre 1 : posons $g(x) = x.\varepsilon(x)$ $g(x) = o(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

_ la partie polynomiale ($a_0 + a_1x + a_2x^2$ est appelée **partie régulière** du développement limité.
Elle donne une bonne approximation de la valeur de f au voisinage de 0.

_ Si f admet un développement limité en 0, alors le développement limité est unique.

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
Si f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) =_0 a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$, alors f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, qui est : $f(x) =_0 a_0 + a_1x + o(x)$.

(car $a_2x^2 =_0 o(x)$ et $x^2 =_0 o(x)$)

Exemple : On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$.
En déduire le développement limité d'ordre 1 et d'ordre 2 de $(1 + x)^3$ en 0.

1.2 Développement limité en x_0

Remarque : En $x_0 \in \mathbb{R}$: $x - x_0 = o(1)$, $(x - x_0)^2 =_{x_0} o(x - x_0)$.

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.
On dit que f possède un développement limité d'ordre 1 en x_0 s'il existe des réels a_0, a_1 tels que

$$\mathbf{f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0).}$$

On dit que f possède un développement limité d'ordre 2 en x_0 s'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que

$$\mathbf{f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).}$$

Remarque importante :
Pour passer d'un développement limité. en x_0 à un développement limité en 0, il suffit de poser $\mathbf{x = x_0 + h}$ (c'est-à-dire $\mathbf{h = x - x_0}$)

Ex : développement limité d'ordre 2 en 1 de $f(x) = x^3$:

1.3 Développement limité d'une fonction de classe C^1, de classe C^2

Propriété : **Formule de Taylor-Young**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
_ si f est de **classe C^1** sur I, alors $\forall x_0 \in I$, $\mathbf{f(x) =_{x_0} f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + o(x - x_0)}$
_ si f est de **classe C^2** sur I, alors $\forall x_0 \in I$,

$$\mathbf{f(x) =_{x_0} f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)}$$

Remarques :
_ si f est dérivable en x_0, l'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
La tangente est une "bonne approximation" de la courbe au voisinage du point.
_ en particulier en 0, la 2ème formule devient : $f(x) =_0 f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$.

Exemple : Soit $f(x) = \ln(x)$.
Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 2 :

2. Développements limités usuels et opérations

2.1 Développements limités usuels

Propriété : A connaitre :

$$\mathbf{e^x =_0 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \qquad \mathbf{\frac{1}{1-x} =_0 1 + x + x^2 + o(x^2)}$$

$$\mathbf{\ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \qquad \mathbf{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^{\alpha} =_0 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)}$$

Démonstration :

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 avec les fonctions :

$f(x) = e^x$ (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) $f'(x) = e^x$ $f''(x) = e^x$ $f(0) = 1$ $f'(0) = 1$ $f''(0) = 1$

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (de classe C^∞ sur $]-\infty;1[$) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $f''(x) = -\dfrac{-2(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

$f(0) = 1$ $f'(0) = 1$ $f''(0) = 2$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $(= e^{\alpha\ln(1+x)})$ f est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$f(0) = 1$ $f'(0) = \alpha$ $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

Remarques :

_ on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots$

$\forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots$ on trouve une grande analogie entre les formules

_ Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 1^k x^k = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \ldots$$

$$= 1 + px + \frac{p!}{2!(p-2)!}x^2 + \ldots. \qquad = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots$$

On retrouve les coefficients ci-dessus.

Exemples :

1) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(1 + 3x)$:

2) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

3) Déterminer le développement limité en 2 de $f(x) = \sqrt{x}$?

2.2 Développements limités et opérations

Propriété :

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que : $f(x) =_0 a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$
$g(x) =_0 b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)$

Alors $\boldsymbol{\lambda f(x) = =_0 \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + o(x^2)}$

$\boldsymbol{x.f(x) =_0 a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + o(x^3) = a_0x + a_1x^2 + o(x^2)}$

$\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x} =_0 \dfrac{a_0}{x} + a_1 + a_2x + o(x)}$

$\boldsymbol{f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + o(x^2)}$

$\boldsymbol{f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + o(x^2)}$

Exemple :
Développement limité en 0 de $xe^x - \ln(1 + x)$?

3. Applications des développements limités

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0.
Si f admet un développement limité d'ordre 1 ou 2 en x_0, alors **f est équivalente au monôme non nul de plus bas degré de son développement limité** (s'il y en a un)

Ex :

Limite de $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ en 0 ?

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 (x_0 compris).
_ Si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 :
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ alors f est dérivable en x_0, $\mathbf{f'(x_0) = a_1}$, et l'équation de la tangente en x_0 est $\mathbf{y = a_0 + a_1(x - x_0)}$.
_ Si $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$
$\big(f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)\big)$
_ si $\mathbf{a_2 > 0}$ la courbe est située **localement au-dessus de sa tangente**
_ si $\mathbf{a_2 < 0}$ la courbe est située **localement en dessous de sa tangente**

Exemple :
A l'aide d'un développement limité, montrer que la fonction exp est dérivable en 0, déterminer sa tangente en 0, et la position de la courbe par rapport à la tangente.

Remarque pour les suites :

$\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$ **= 0, donc les résultats sur les développements limités en 0 peuvent être utiles pour trouver des approximations sur les suites, appelées développements asymptotiques.**

Exemple :
Déterminer un développement asymptotique de $e^{1/n}$ en $+ \infty$: